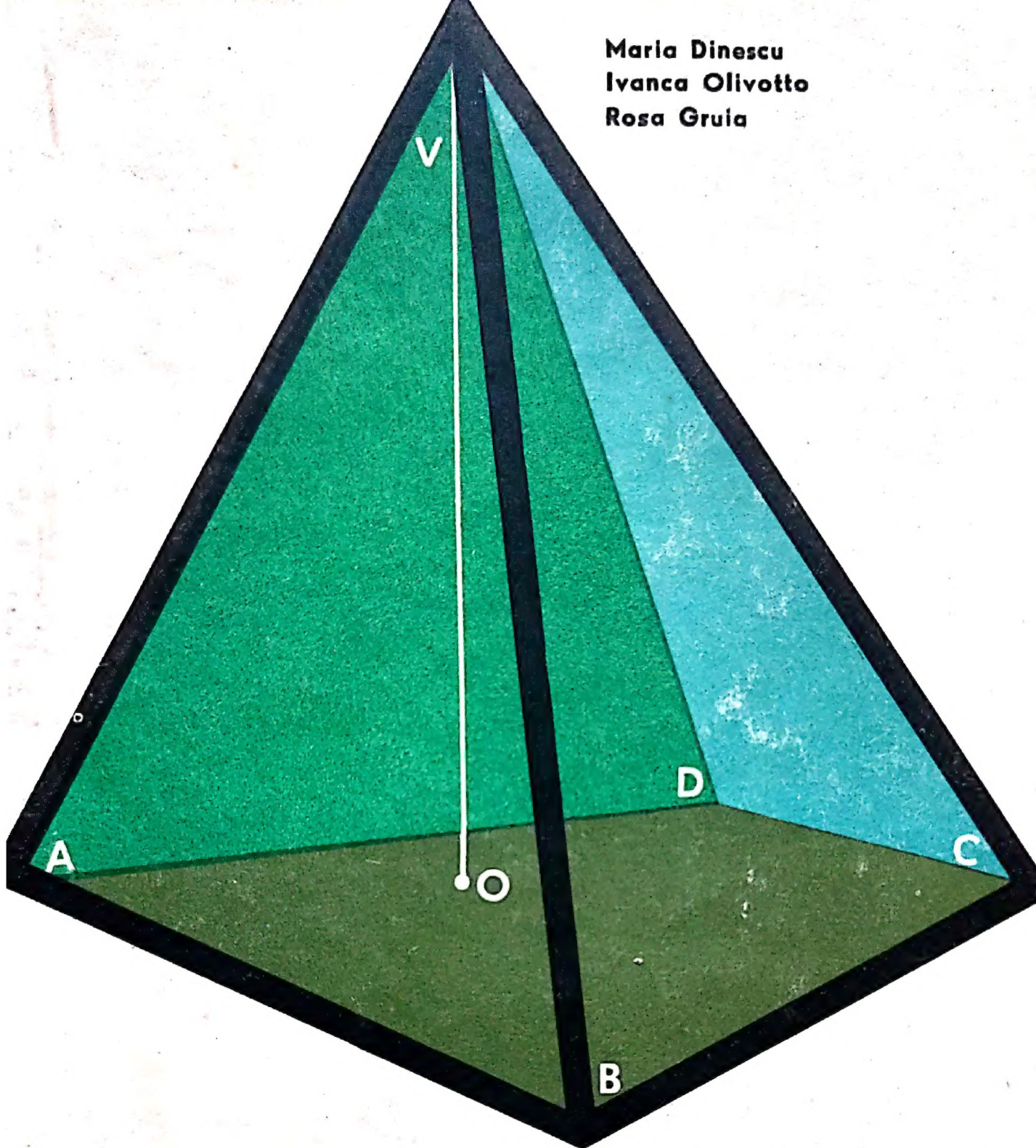


Marla Dinescu  
Ivanca Olivotto  
Rosa Gruia



# **MATEMATICĂ**

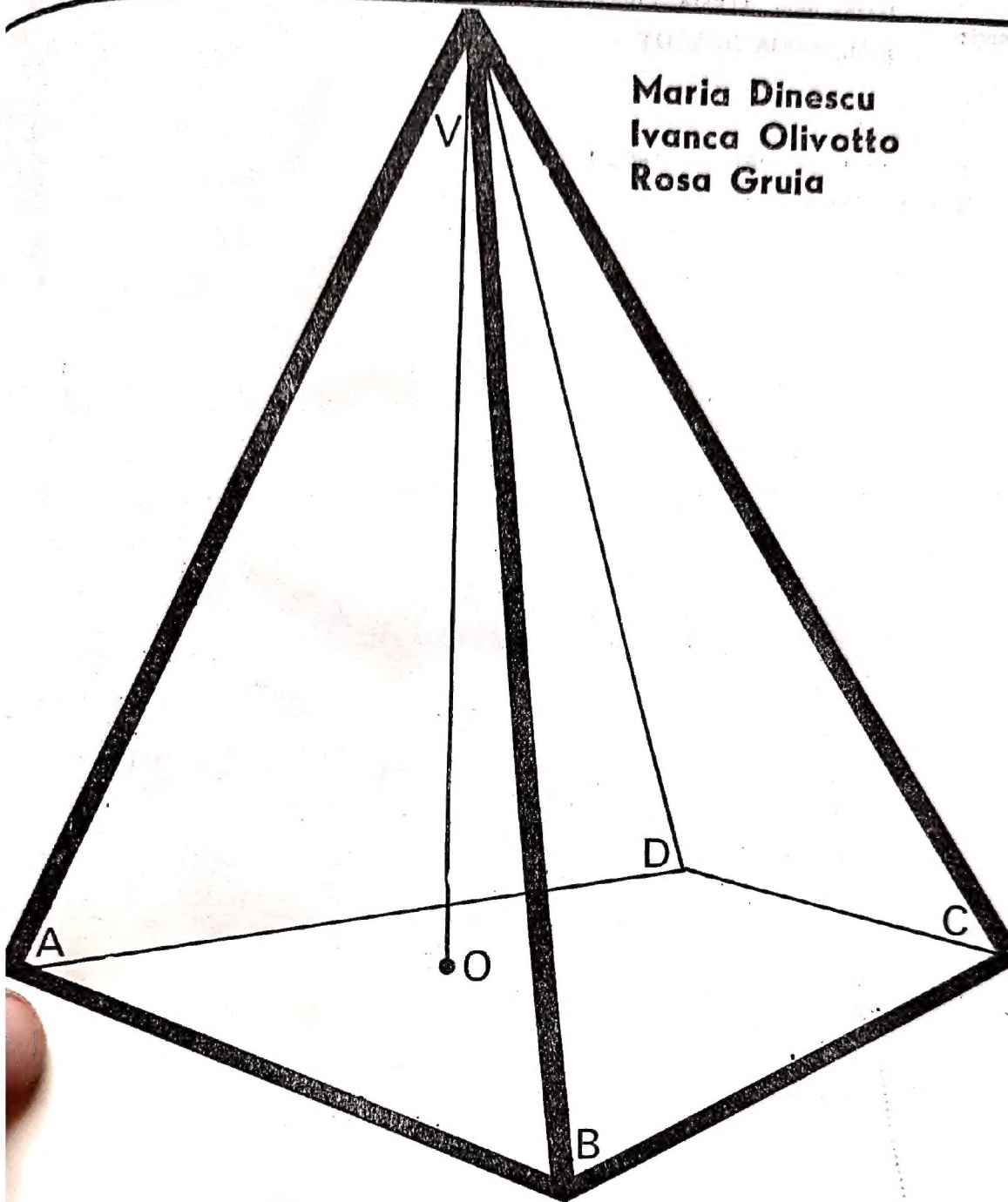
pentru candidații la examenele de admitere în licee

Editura didactică și pedagogică  
București - 1970



Scanned with OKEN Scanner

Maria Dinescu  
Ivanca Olivotto  
Rosa Gruia



# Matematică

pentru candidații la examenele de admitere în licee



Editura didactică și pedagogică  
București — 1970



## I Numere raționale

### Mulțimi

În acest capitol vom prezenta mai întâi câteva noțiuni de teoria mulțimilor cunoscute din școala generală.

Noțiunea de *mulțime* este o noțiune primară, ea nu se definește și are sens de colecție sau grămadă de obiecte.

Mulțimile se notează de obicei cu litere mari ale alfabetului:  $A, B, \dots, M, N, \dots$

Elementele mulțimii  $A$ , obiectele care fac parte din mulțimea  $A$ , se notează de obicei cu litere mici ale alfabetului:  $a, b, \dots, m, n, \dots$

Vom nota  $a \in A$  dacă elementul  $a$  aparține mulțimii  $A$ .

Vom nota  $a \notin A$  dacă elementul  $a$  nu aparține mulțimii  $A$ .

Mulțimea  $A$  poate fi dată prin enumerarea elementelor care alcătuiesc mulțimea și se notează scriind elementele într-o acoladă:  $\{a, b, c\}$  sau prin enunțarea unei proprietăți pe care o au toate elementele mulțimii și numai aceste elemente.

Exemplu. Mulțimea paralelogramelor este mulțimea patrulaterelor care au laturile opuse paralele.

*Mulțime vidă* este mulțimea care nu are nici un element; se notează  $\emptyset$ .

Exemplu. În biblioteca școlii noastre nu există cărți în limba arabă deci, mulțimea cărților în limba arabă din biblioteca noastră este mulțimea vidă.

**Incluziune.** Dacă fiecare element al mulțimii  $A$  aparține mulțimii  $B$  spunem că mulțimea  $A$  este inclusă în mulțimea  $B$  sau mulțimea  $B$  include mulțimea  $A$  și se notează  $A \subset B$  sau  $B \supset A$ .

Exemplu. Mulțimea paralelogramelor include mulțimea romburilor (orice romb este paralelogram).

**Mulțimi egale.** Dacă fiecare element al mulțimii  $A$  aparține mulțimii  $B$  și fiecare element al mulțimii  $B$  aparține și mulțimii  $A$  ( $A \subset B$  și  $B \subset A$ ) atunci cele două mulțimi sînt egale. Scriem  $A = B$ .

**Operații cu mulțimi.** *Reuniunea* a două mulțimi  $A$  și  $B$  este mulțimea tuturor elementelor care aparțin cel puțin uneia din cele două mulțimi și se notează

$$A \cup B.$$

Exemplu. Fie mulțimile  $A = \{a, b\}$  și  $B = \{c, d\}$ .

$$\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}.$$



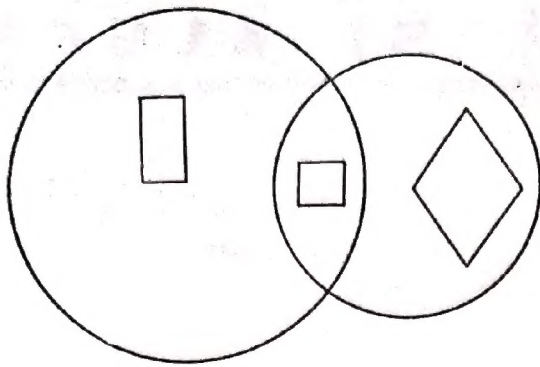


Fig. 1

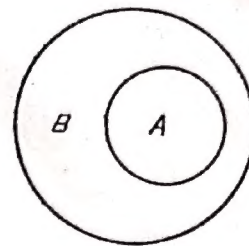


Fig. 2

**Intersecția** a două mulțimi  $A$  și  $B$  este mulțimea elementelor comune celor două mulțimi (care aparțin atât mulțimii  $A$  cât și mulțimii  $B$ ) și se notează

$$A \cap B.$$

**Exemplu.** Intersecția dintre mulțimea dreptunghiurilor și mulțimea romburilor este mulțimea pătratelor (fig. 1).

**Mulțimi disjuncte** sînt mulțimile care nu au elemente comune (intersecția lor este mulțimea vidă).

**Exemplu.**  $\{1, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$ .

**Observări.** 1) Reuniunea unei mulțimi  $A$  cu o mulțime  $B$  care o include este mulțimea  $B$  (fig. 2).

Dacă  $A \subset B$ , atunci  $A \cup B = B$ .

2) Intersecția unei mulțimi  $A$  cu o mulțime  $B$  care o include este mulțimea  $A$ .

Dacă  $A \subset B$ , atunci  $A \cap B = A$ .

3) Dacă mulțimile  $A$  și  $B$  nu sînt disjuncte ( $A \cap B = C \neq \emptyset$ ), atunci reuniunea  $A \cup B$  cuprinde elementele necomune din  $A$  și  $B$  și elementele comune.

**Exemplu.** Elevii  $a, b, c$  au media 10 la limba română, elevii  $a, b, d, e, f$  au media 10 la matematică.

Mulțimea elevilor cu media 10 la limba română sau la matematică este reuniunea celor două mulțimi.

$$\{a, b, c\} \cup \{a, b, d, e, f\} = \{a, b, c, d, e, f\}.$$

4)  $A \cup \emptyset = A$ . Reuniunea unei mulțimi  $A$  cu mulțimea vidă este mulțimea  $A$ .

5)  $A \cap \emptyset = \emptyset$ . Intersecția unei mulțimi  $A$  cu mulțimea vidă este mulțimea vidă.

**Proprietăți.**

Reuniunea mulțimilor este comutativă și asociativă.

$$A \cup B = B \cup A; \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Intersecția mulțimilor este comutativă și asociativă.

$$A \cap B = B \cap A; \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Reuniunea este distributivă față de intersecție și intersecția este distributivă față de reuniune.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

**Correspondență biunivocă.** Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi. Presupunem că fiecărui element din mulțimea  $A$  îi corespunde un singur element în mulțimea  $B$  și reciproc. Dacă



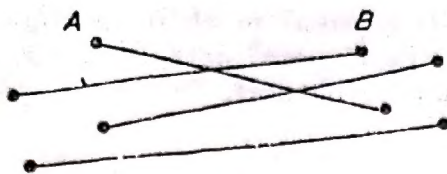


Fig. 3

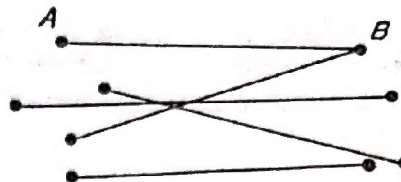


Fig. 4

la elemente diferite din mulțimea  $A$  corespund elemente diferite în mulțimea  $B$  și reciproc, spunem că între mulțimile  $A$  și  $B$  s-a realizat o *corespondență biunivocă* (fig. 3).

Cele două mulțimi reprezentate în figura 4 nu sînt în corespondență biunivocă.

Dacă într-o sală de cinematograful fiecare spectator ocupă un singur loc și fiecare loc este ocupat de un spectator, atunci între mulțimea spectatorilor și mulțimea locurilor există o corespondență biunivocă.

**Funcții.** Fie  $E$  și  $F$  două mulțimi. Dacă fiecărui element al mulțimii  $E$  facem să-i corespundă un element din mulțimea  $F$  și numai unul, spunem că am definit o *funcție* pe  $E$  cu valori în  $F$ .

Mulțimea  $E$  se numește *domeniul de definiție* (de existență) al funcției iar  $F$ , *mulțimea în care funcția ia valori*.

O funcție se notează de obicei cu o literă:  $f, g, h, \dots$ . Dacă elementului  $a \in E$  îi corespunde prin funcția  $f$  elementul  $b \in F$ , spunem că  $b$  este *imagea lui  $a$  prin funcția dată* și scriem  $b = f(a)$ .

**Exemplu.** Latura unui pătrat avînd lungimea  $x$ , perimetrul este  $4x$ . Vom spune că perimetrul este funcție de lungimea laturii. Pentru această funcție  $E = (0, +\infty)$  și  $F = (0, +\infty)$ .

## Numere naturale

Mulțimile echivalente de obiecte (mulțimi între care s-a stabilit o corespondență biunivocă) sînt caracterizate de același număr — numărul obiectelor care aparțin fiecărei mulțimi.

De exemplu: 5 elevi, 5 creioane, 5 flori, 5 litere, 5 substantive etc. sînt mulțimi echivalente; caracteristica lor comună este numărul 5.

Mulțimile care conțin cîte un singur element sînt mulțimi echivalente, lor le corespunde numărul 1 (unu).

Dacă fiecărei mulțimi de un element îi adăugăm cîte un element, se obțin mulțimi echivalente de cîte două elemente. Lor le corespunde numărul 2 (doi) etc. Mulțimea vidă are 0 (zero) elemente.

Numerele 1, 2, 3, 4, ... se numesc *numere naturale*, primul număr natural este 1, el are un succesor (numărul 2). Fiecare număr natural are un succesor obținut adăugînd acelui număr o unitate, putem deci forma un număr natural oricît de mare vrem.

Numerele 1, 2, 3, 4, ... formează un șir, șirul numerelor naturale (întregi pozitive); șirul numerelor naturale este nesfîrșit.

Dacă la șirul numerelor naturale adăugăm și numărul 0 (zero) avem șirul lărgit al numerelor naturale:

0, 1, 2, 3, ...

## Operații cu numere naturale

**Adunarea.** Suma a două numere naturale  $a$  și  $b$  este numărul elementelor obținute prin reuniunea a două mulțimi disjuncte care au  $a$  respectiv  $b$  elemente și se notează  $a + b$ . Operația prin care se obține numărul  $a + b$  se numește adunare, iar numerele



$a$  și  $b$  termenii adunării. O sumă de mai mulți termeni se obține adăugând la suma primilor doi termeni pe al treilea, la suma obținută pe al patrulea ș.a.m.d.

Suma a două numere naturale este tot un număr natural.

### Proprietăți

Adunarea numerelor naturale este o operație comutativă:

$$1. \quad a + b = b + a.$$

Suma nu se schimbă când schimbăm ordinea termenilor

Exemplu.  $3 + 5 = 5 + 3$ .

Adunarea numerelor naturale este o operație asociativă

$$2. \quad (a + b) + c = a + (b + c).$$

Suma nu se schimbă când înlocuim doi sau mai mulți termeni cu suma lor.

$$\text{Exemple: } (3 + 6) + 4 = 3 + (6 + 4), \quad 2 + 5 + 3 + 7 = 2 + (5 + 3 + 7) = 2 + 5 + (3 + 7)$$

Suma oricărui număr natural cu 0 este egală cu acel număr:  $a + 0 = a$ . Spunem că 0 este element neutru pentru adunare

$$\text{Exemplu. } 3 + 0 = 3; \quad 5 + 0 = 5.$$

Scăderea este operația inversă adunării.

A scădea un număr  $b$  (scăzător) dintr-un număr  $a$  (descăzut) înseamnă a găsi un număr  $c$  (rest sau diferență) care adunat cu  $b$  să dea numărul  $a$

$$a - b = c \quad \text{dacă} \quad b + c = a.$$

$$\begin{array}{lll} \text{Exemple} & 5 - 3 = 2 & \text{căci } 2 + 3 = 5 \\ & 5 - 5 = 0 & \text{căci } 0 + 5 = 5 \\ & 7 - 0 = 7 & \text{căci } 7 + 0 = 7. \end{array}$$

Dacă  $a$  și  $b$  sînt numere naturale atunci  $a - b$  este număr natural dacă și numai dacă  $a > b$  ( $a$  mai mare decît  $b$ ).

$$\text{Dacă } a = b, \quad a - b = 0.$$

Dacă  $a < b$  ( $a$  mai mic decît  $b$ )  $a - b$  nu este număr natural.

### Ordinea efectuării operațiilor de adunare și scădere și folosirea parantezelor

Adunarea și scăderea sînt operații de același ordin (ordinul I). Dacă avem o expresie, care nu cuprinde paranteze, în care avem de efectuat adunări și scăderi, le putem efectua în ordinea în care sînt scrise.

$$\text{De exemplu: } 7 + 5 - 3 - 2 = 12 - 3 - 2 = 9 - 2 = 7.$$

Dacă o expresie cuprinde și paranteze atunci efectuăm mai întîi calculele din paranteze. Se folosesc paranteze mici ( ); paranteze drepte [ ]; acolade { }. Se efectuează întîi calculele din parantezele mici, apoi din cele drepte apoi cele din acoladă.

$$\text{Exemple. } 1) 7 + 5 - (3 - 2) = 7 + 5 - 1 = 11$$

$$2) 7 - \{4 - [5 - (4 - 2)]\} = 7 - [4 - (5 - 2)].$$



Am efectuat calculul din paranteza mică  $4 - 2 = 2$ . Acoladele s-au transformat în paranteze drepte; parantezele drepte în paranteze rotunde. Mai departe se efectuează calculul din paranteza mică  $5 - 2 = 3$  și obținem:

$$\begin{aligned} 7 - [4 - (5 - 2)] &= 7 - (4 - 3) \\ 7 - (4 - 3) &= 7 - 1 = 6. \end{aligned}$$

### Proprietăți ale operațiilor de adunare și scădere cu numere naturale

1. Pentru a aduna un număr la o sumă este suficient să adunăm acest număr la un termen al sumei.

În adevăr, pe baza comutativității adunării, fiind dată suma  $a + b = s$ , avem  $s + c = (a + b) + c = (a + c) + b$ .

Exemplu.  $(125 + 32) + 75 = (125 + 75) + 32 = 200 + 32 = 232$ .

2. Pentru a scădea un număr dintr-o sumă este suficient să scădem acest număr dintr-un termen al sumei (dacă acest lucru este posibil).

Fiind dată  $s = a + b$  avem

$$s - m = a - m + b.$$

În adevăr,  $s - m = b + a - m$  (comutativitate).

Dacă mărim un termen al sumei cu un număr, suma se mărește cu acel număr:

$$s - m + m = b + (a - m + m). \text{ Din definiția scăderii}$$

$$s - m + m = s$$

$$a - m + m = a,$$

$$s = b + a.$$

Exemplu.  $(17 + 5) - 7 = (17 - 7) + 5 = 10 + 5 = 15$ .

3. Dacă adunăm un număr la un termen al sumei și scădem același număr dintr-un alt termen al sumei, suma nu se schimbă.

$$a + b + c = s, \quad (a + d) + b + (c - d) = s.$$

În adevăr,  $a + d + b + c = s + d$ ,

$$(a + d) + b + (c - d) = s + d - d,$$

$$(a + d) + b + (c - d) = s.$$

Exemplu.  $(15 + 3 + 4) = (15 + 2) + 3 + (4 - 2) = 22$ .

4. Dacă adunăm un număr la descăzut, diferența se mărește cu acel număr: dacă adunăm un număr la scăzător diferența se micșorează cu acel număr. Dacă adunăm un număr atât la descăzut cât și la scăzător, diferența nu se schimbă.

$$a - b = d,$$

$$1^\circ (a + m) - b = d + m,$$

$$2^\circ a - (b + m) = d - m,$$

$$3^\circ (a + m) - (b + m) = d.$$

În adevăr, aplicînd definiția scăderii:

$$1' b + d + m = d + b + m = (a - b + b) + m = a + m,$$

$$2' d - m + b + m = (d - m + m) + b = d + b = a - b + b = a$$

$$3' d + (b + m) = a - b + b + m = a + m.$$

*Exemplu.*  $15 - 6 = (15 + 4) - (6 + 4) = 19 - 10 = 9.$

**5.** Dacă scădem un număr din descăzut, diferența se micșorează cu acel număr; dacă scădem un număr din scăzător, diferența se mărește cu acel număr; dacă scădem din ambii termeni ai unei diferențe același număr, diferența nu se schimbă.

$$a - b = d \ (a - b > 0), \quad 1^\circ (a - m) - b = d - m,$$

$$2^\circ a - (b - m) = d + m,$$

$$3^\circ (a - m) - (b - m) = d.$$

În adevăr,  $1') b + d - m = b + (a - b) - m = (a + b - b) - m = a - m,$

$$2') d + m + b - m = a - b + m + b - m = (a - b + b) + m - m = a,$$

$$3') d + (b - m) = (a - b) + (b - m) = a - b + b - m = a - m.$$

*Exemplu.*  $15 - 6 = (15 - 5) - (6 - 5) = 10 - 1 = 9.$

**6.** Pentru a scădea o sumă dintr-un număr scădem pe rând termenii sumei.

$$a - (b + c) = d \quad (a > b + c), \quad a - (b + c) = a - b - c.$$

În adevăr,  $b + c + (a - b - c) = b + c + a - b - c = a + (c + b - b) - c = a + c - c = a.$

*Exemplu.*  $17 - (5 + 8) = (17 - 5) - 8 = 12 - 8 = 4.$

**7.** Pentru a aduna o diferență la un număr este suficient să scădem scăzătorul din acel număr dacă scăderea este posibilă, apoi la rezultat să adunăm descăzutul sau adunăm descăzutul la acel număr și apoi din rezultat scădem scăzătorul.

$$a + (b - c) = s,$$

$$1^\circ a + (b - c) = a - c + b,$$

$$2^\circ a + (b - c) = a + b - c.$$

În adevăr, pe baza proprietății a treia și a cincea:

$$1' a + (b - c) = (a - c) + (b - c + c) = a - c + b = s,$$

$$2' a + (b - c) = a + b + (b - b - c) = a + b - c = s.$$

*Exemplu.*  $17 + (25 - 12) = (17 - 12) + 25 = 5 + 25 = 30,$

$$17 + (25 - 12) = 17 + 25 - 12 = 42 - 12 = 30.$$

**8.** Pentru a scădea o diferență dintr-un număr este suficient să scădem din acel număr descăzutul (dacă este posibil) și la rezultat să adunăm scăzătorul sau să adunăm scăzătorul la acel număr și din rezultat să scădem pe descăzut.

$$a - (b - c) = d,$$

$$1^\circ a - (b - c) = (a - b) + c, \quad a - b > 0,$$

$$2^\circ a - (b - c) = a + c - b$$

Relațiile sînt adevărate căci aplicînd relația de definiție a diferenței, comutativitatea și asociativitatea sumei avem:

$$1') (b - c) + (a - b) + c = (a - b) + (b - c) + c = (a - b + b) - c + c = a$$

deci  $a - (b - c) = (a - b) + c,$



$$2') (a + c - b) + (b - c) = a + c - b + b - c = a + (c - b + b) - c = \\ = a + c - c = a$$

deci  $a - (b - c) = a + c - b$

Exemple. a)  $17 - (13 - 3) = 17 - 13 + 3 = 4 + 3 = 7,$

$$17 - (13 - 3) = 17 + 3 - 13 = 20 - 13 = 7,$$

b)  $17 - (25 - 9) = 17 + 9 - 25 = 1.$

## Înmulțirea

A înmulți un număr  $a$  numit deînmulțit cu un număr natural  $b$  numit înmulțitor înseamnă a găsi un număr notat  $a \cdot b$  numit produs. Prin produsul  $a \cdot b$  ( $b$  număr natural) înțelegem o sumă de  $b$  termeni în care fiecare termen este egal cu  $a$ :

$$\underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ termeni}} = a \cdot b.$$

Numerele  $a$  și  $b$  se numesc factori ai produsului

$$0 \cdot a = 0 \quad \text{căci} \quad 0 \cdot a = \underbrace{0 + 0 + 0 \dots + 0}_{a \text{ termeni}} = 0.$$

Prin definiție:

$$a \cdot 0 = 0 \text{ (produsul unui număr cu zero este zero),}$$

$$a \cdot 1 = a \text{ (produsul unui număr cu 1 este acel număr).}$$

Produsul a două numere naturale este totdeauna un număr natural.

$$\text{Produsul } a \cdot b \cdot c = \underbrace{ab + ab + \dots + ab}_{c \text{ termeni}}.$$

Pentru a efectua un produs de mai mulți factori înmulțim produsul primilor doi factori cu al treilea; produsul obținut cu al patrulea factor ș.a.m.d.

**Observare.** Un produs de doi factori este egal cu zero, dacă și numai dacă unul din factori este egal cu zero.

În adevăr,

$$\text{dacă } a = 0 \text{ atunci } a \cdot b = 0 \cdot b = 0 \text{ oricare ar fi } b,$$

$$\text{dacă } b = 0 \text{ atunci } a \cdot b = a \cdot 0 = 0 \text{ oricare ar fi } a,$$

$$\text{dacă } a \neq 0 \text{ și } b = 1, a \cdot b = a \cdot 1 = a \neq 0,$$

$$\text{dacă } a \neq 0 \text{ și } b > 1 \text{ atunci } a \cdot b = a + a + \dots + a + a \neq 0 \text{ } b \text{ (termeni diferiți de zero).}$$

## Proprietățile înmulțirii

1)  $a \cdot b = b \cdot a$ . Înmulțirea este comutativă  $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$ .

2)  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  înmulțirea este asociativă.

Exemplu.  $7 \cdot 5 \cdot 4 = 7 \cdot (5 \cdot 4)$ .

3)  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ . Înmulțirea este distributivă față de adunare și scădere.

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c); \quad a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c).$$

*Exemple.*

$$3 \cdot (5 + 2) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2,$$

$$2 \cdot (7 - 4) = 2 \cdot 7 - 2 \cdot 4$$

**Împărțirea numerelor naturale.** În mulțimea numerelor din șirul lărgit al numerelor naturale, fiind date două numere  $a$  și  $b \neq 0$ , a împărți numărul  $a$ , numit deîmpărțit, la numărul  $b$ , numit împărțitor, înseamnă a găsi un număr  $q$ , numit cât, și un număr  $r$  ( $0 \leq r < b$ ), numit rest, astfel încât să existe relația

$$a = bq + r.$$

*Observări.* 1) Condiția  $b \neq 0$  se explică prin faptul că împărțirea unui număr la zero nu are sens.

2) Pentru două numere date  $a$  și  $b \neq 0$  există un singur număr  $q$  și un singur număr  $r < b$  astfel încât relația 1) să fie satisfăcută.

**Împărțirea exactă.** Dacă la împărțirea numerelor  $a$  și  $b \neq 0$  obținem câtul  $q$  și restul  $r = 0$ , atunci împărțirea se numește exactă și relația 1) devine

$$1') a = bq$$

*Exemple.*

$$26 : 4 = 6 \text{ (rest 2) căci } 4 \cdot 6 + 2 = 26;$$

$$16 : 5 = 3 \text{ (rest 1) căci } 5 \cdot 3 + 1 = 16;$$

$$20 : 4 = 5 \text{ (rest 0) căci } 4 \cdot 5 = 20.$$

*Observare.* Prin împărțire, în mulțimea numerelor naturale, se rezolvă două probleme:

a) *Împărțirea în părți egale sau micșorarea unui număr de un număr de ori.*

b) *Împărțirea prin cuprindere.* În acest caz se află de câte ori se cuprinde un număr (împărțitor) într-un alt număr (deîmpărțit).

### Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

Înmulțirea și împărțirea (exactă) sînt operații de ordinul II.

Dacă într-o expresie fără paranteze sînt operații de înmulțire și împărțire ele se pot efectua în ordinea în care sînt scrise. Dacă expresia conține paranteze, se efectuează mai întîi operațiile din paranteze, întîi din cele rotunde, apoi din cele pătrate apoi din acolade.

*Exemple.* 1)  $250 : 25 : 5 = 10 : 5 = 2;$   
2)  $50 : 2 \cdot 5 = 25 \cdot 5 = 125;$   
3)  $250 : (25 : 5) = 250 : 5 = 50;$   
4)  $50 : (2 \cdot 5) = 50 : 10 = 5.$

Cercetînd exemplele 1 și 3 și 2 și 4 observăm că folosirea parantezelor a condus la schimbarea rezultatelor.

$$5) \quad 5 \cdot \{150 : [20 : (2 \cdot 2)]\} = 5 \cdot [150 : (20 : 4)]$$

Am efectuat operația din paranteza mică  $2 \cdot 2 = 4$

$$5 \cdot [150 : (20 : 4)] = 5 \cdot (150 : 5)$$



Am efectuat operația din paranteza dreaptă (pe care am schimbat-o în paranteză mică):

$$20 : 4 = 5$$

$$5 \cdot (150 : 5) = 5 \cdot 30 = 150.$$

Dacă avem o expresie fără paranteze cu toate cele 4 operații vom efectua mai întâi înmulțirile și împărțirile (operațiile de ordinul II) apoi adunările și scăderile (operațiile de ordinul I). Dacă expresia cuprinde paranteze se efectuează mai întâi calculele din paranteze (din cele mici apoi din cele drepte apoi din acolade). Calculele din paranteză se fac ținând seama de ordinea operațiilor.

*Exemple.*

$$1) 117 - 5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 117 - 10 + 12 = 107 + 12 = 119;$$

$$2) 117 - 5 (2 + 3 \cdot 4) = 117 - 5 (2 + 12) = 117 - 5 \cdot 14 = 117 - 70 = 47.$$

### Proprietățile operațiilor de înmulțire și împărțire

Pe baza proprietăților înmulțirii (comutativitatea și asociativitatea) rezultă următoarele proprietăți:

1. Pentru  $a$  înmulți un număr cu un produs este suficient să înmulțim numărul cu un factor al produsului și rezultatul să-l înmulțim cu ceilalți factori ai produsului.

$$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = b \cdot (a \cdot c).$$

*Exemplu.*  $25 \cdot (13 \cdot 4) = 13 \cdot 4 \cdot 25 = 13 \cdot 100 = 1300.$

În practică, înmulțim numărul cu factorul care conduce la un calcul mai simplu.

2. Pentru  $a$  înmulți un produs cu un număr este suficient să înmulțim un factor al produsului cu acel număr și rezultatul să-l înmulțim cu ceilalți factori.

$$(a \cdot b \cdot c) \cdot d = abcd = (ad) bc = (bd) ac = (cd) ab.$$

*Exemplu.*  $(25 \cdot 7 \cdot 3) \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot 7 \cdot 3 = 100 \cdot 21 = 2100.$

3. Dacă împărțim un număr  $a$  la un alt număr  $b$  și apoi înmulțim rezultatul cu același număr  $b$  obținem numărul  $a$

$$(a : b) \cdot b = a$$

*Exemplu.*  $(6 : 3) \cdot 3 = 6.$

4. Dacă înmulțim deîmpărțitul cu un număr natural, câtul se mărește de acel număr de ori.

Dacă  $a : b = c$ , atunci  $(a \cdot m) : b = c \cdot m.$

Din definiția împărțirii trebuie să avem  $(cm) \cdot b = a \cdot m.$

În adevăr:  $(cm) \cdot b = c \cdot m \cdot b = m \cdot c \cdot b = m (a : b) \cdot b = ma$

Am aplicat comutativitatea, asociativitatea și proprietatea precedentă.

*Exemplu.*  $18 : 3 = 6; \quad 18 \cdot 2 : 3 = 12 = 6 \cdot 2.$

5. Dacă înmulțim împărțitorul cu un număr natural, câtul se împarte cu acel număr.

Dacă  $a : b = c$ , atunci  $a : (b \cdot m) = c : m.$

În adevăr  $(b \cdot m) \cdot (c : m) = b \cdot m \cdot (c : m) = b \cdot (c : m) \cdot m = bc = a.$

*Exemplu.*  $18 : 3 = 6, \quad 18 : (3 \cdot 2) = 3 = 6 : 2.$

**6. Consecință.** Dacă se înmulțesc și deîmpărșitul și împărșitorul unei împărșiri cu același număr cîtul nu se schimbă.

Dacă  $a : b = c$ , atunci  $(a \cdot m) : (b \cdot m) = c$ .

În adevăr, avem succesiv

$$(a \cdot m) : b = c \cdot m,$$

$$(a \cdot m) : (b \cdot m) = c \cdot m : m = c,$$

*Exemplu.*  $18 : 3 = 6, \quad (18 \cdot 2) : (3 \cdot 2) = 6.$

**7. Dacă împărșim deîmpărșitul cu un număr natural cîtul se împarte cu acel număr.**

Dacă  $a : b = c$ , atunci  $(a : m) : b = c : m$ .

Din definiția împărșirii:

$$b \cdot (c : m) = b \cdot c : m = a : m, \quad \text{căci } bc = a$$

*Exemplu.*  $18 : 3 = 6, \quad (18 : 2) : 3 = 3 = 6 : 2.$

**8. Dacă împărșim împărșitorul cu un număr natural cîtul se înmulțește cu acel număr.**

Dacă  $a : b = c$ , atunci  $a : (b : m) = c \cdot m$ .

Din definiția împărșirii,

$$(b : m) \cdot cm = (b : m) \cdot mc,$$

$$(b : m) \cdot mc = b \cdot c = a.$$

*Exemplu.*  $18 : 6 = 3, \quad 18 : (6 : 2) = 6 = 3 \cdot 2.$

**9. Consecință.** Dacă împărșim ambii termeni cu același număr cîtul nu se schimbă.

*Exemplu.*  $18 : 6 = 3, \quad (18 : 2) : (6 : 2) = 3.$

**10. Pentru a împărși un produs cu un număr este suficient să împărșim unul din factori cu acel număr și rezultatul să-l înmulțim cu ceilalți factori.**

$$(a \cdot b \cdot c) : d = (a : d) \cdot bc.$$

Aplicînd definiția împărșirii:

$$(a : d) \cdot bc \cdot d = (a : d) \cdot d \cdot bc,$$

$$(a : d) \cdot d \cdot bc = abc.$$

Deci  $(abc) : d = (a : d) \cdot b \cdot c.$

*Exemplu.*  $(25 \cdot 2 \cdot 3) : 5 = (25 : 5) \cdot 2 \cdot 3 = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30.$

**11. Pentru a împărși un număr cu un produs este suficient să împărșim numărul succesiv cu factorii produsului.**

$$a : (b \cdot c) = a : b : c.$$

În adevăr, aplicînd (9),

$$a : (b \cdot c) = a : b : (bc : b) = a : b : (cb : b) = a : b : c.$$

*Exemplu.*  $18 : (2 \cdot 3) = 18 : 2 : 3 = 9 : 3 = 3.$

**12. Pentru a împărși un număr la un cît este suficient să înmulțim numărul cu împărșitorul și rezultatul să-l împărșim la deîmpărșit sau să împărșim numărul la deîmpărșit și rezultatul să-l înmulțim cu împărșitorul.**

$$a : (b : c) = a \cdot c : b = a : b \cdot c.$$



În adevăr, aplicînd (6) apoi (9),

$$\begin{aligned} a : (b : c) &= a \cdot c : (b : c \cdot c) = a \cdot c : b \text{ și} \\ a : (b : c) &= (a \cdot c) : (b : c \cdot c) = (a \cdot c) : b \end{aligned}$$

aplicînd (10),  $a : (b : c) = a : b \cdot c$ .

*Exemplu.*  $36 : (18 : 2) = 36 \cdot 2 : 18 = 4,$   
 $36 : (18 : 2) = 36 : 18 \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4.$

*Observare.* În proprietățile stabilite se presupune că toate împărțirile sînt exacte.

**13.** Dacă înmulțim (împărțim) ambii termeni cu un număr natural, cîtul nu se schimbă dar restul (dacă există) se mărește (micșorează) de acel număr de ori.

$$a : b = c \text{ (rest } r) \text{ sau } a = bc + r, \quad r < b.$$

$$1) (am) : (bm) = c \text{ rest } rm; \quad 2) (a : m) : (b : m) = c \text{ rest } r : m$$

În adevăr, din  $a = bc + r$  avem  $a - bc = bc - bc + r,$

$$a - bc = r \quad \text{deci}$$

1')  $ma - bc \cdot m = rm$  (am înmulțit ambii termeni ai unei diferențe cu  $m$  și diferența s-a mărit de  $m$  ori).

Dar dacă  $r < b$  și  $mr < mb,$

$$\text{deci } ma : (b \cdot m) = c \quad (\text{rest } rm).$$

$$2') a - bc = r,$$

$a : m - (bc : m) = r : m$  (am împărțit ambii termeni ai unei diferențe cu  $m$ ),  
 deci:

$$a : m = (b : m) \cdot c + r : m.$$

**14.** Împărțirea este distributivă față de adunare și scădere.

$$(a + b + c) : m = a : m + b : m + c : m,$$

$$(a - b) : m = a : m - b : m.$$

## Puteri

Puterea  $n$  a unui număr  $a$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) este un produs de  $n$  factori egali cu  $a$  și se notează  $a^n$ .

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}} = a^n.$$

$a$  se numește baza puterii,  $n$  exponentul puterii. De exemplu

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4.$$

$3^4$  (puterea a 4-a a lui 3); 3 (baza puterii); 4 (exponentul puterii).

Cazuri particulare:

$$a = 0 ;$$

$$a = 1 ;$$

$$0^n = 0 \quad (n \neq 0)$$

$$1^n = 1$$

$n = 0$  ;  $a^0 = 1$  ( $a \neq 0$ ) Orice număr diferit de zero ridicat la o putere cu exponent 0 este egal cu 1.

$n = 1$  ;  $a^1 = a$  Orice număr ridicat la o putere cu exponentul 1 este egal cu el însuși.

$n = 2$  ;  $a^2$  se numește pătratul numărului  $a$ .

$n = 3$  ;  $a^3$  se numește cubul numărului  $a$ .

Pătratul numărului 5 este  $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ .

Cubul numărului 4 este  $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ .

## Operații cu puteri

1. *Produsul a două puteri, care au aceeași bază, este tot o putere care are aceeași bază iar ca exponent suma exponenților.*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

În adevăr,

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ factori}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ factori}} = a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^{m+n}.$$

*Exemplu.*  $3^5 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^7$ .

În mod analog

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}.$$

2. *Cîtuț a două puteri care au aceeași bază este tot o putere cu aceeași bază iar ca exponent diferența exponenților.*

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad m, n \in \mathbb{N} \text{ și } m > n.$$

În adevăr, a împărți numărul  $a^m$  la numărul  $a^n$  înseamnă a găsi un număr care înmulțit cu  $a^n$  să ne dea  $a^m$ . Dar  $a^n \cdot a^{m-n} = a^m$ .

Dacă  $m = n$ ,  $a^m : a^m = 1$ . Putem spune  $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0 = 1$ .

Deci  $a^m : a^n = a^{m-n}$  pentru  $m \geq n$ .

3. *Ridicarea unei puteri la altă putere. Dacă ridicăm o putere la altă putere, obținem tot o putere care are aceeași bază și exponentul egal cu produsul exponenților.*

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

În adevăr,

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{\text{de } n \text{ ori}} = a^{m+m+\dots+m} = a^{mn}$$

*Exemple.*  $(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$ ,

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2 \cdot 3} = a^6.$$

4. *Puterea unui produs se calculează ridicînd fiecare factor al produsului la acea putere.*

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m.$$



În adevăr,  $(a \cdot b)^m = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)$  de  $m$  ori.

Aplicând regulile înmulțirii cu un produs și proprietățile de comutativitate și asociativitate obținem succesiv

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ factori}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{m \text{ factori}} = a^m \cdot b^m.$$

$$\begin{aligned} \text{Exemple. } (3 \cdot 5)^3 &= (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = \\ &= (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5), \\ (3 \cdot 5)^3 &= 3^3 \cdot 5^3, \\ (2 \cdot 7)^2 &= 2^2 \cdot 7^2. \end{aligned}$$

### Extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr natural

În mulțimea numerelor din șirul lărgit al numerelor naturale a extrage rădăcina pătrată dintr-un număr  $A$  înseamnă a găsi un număr  $a$  numit rădăcina pătrată și un număr  $r$  numit rest astfel încît

$$A = a^2 + r \quad \text{cu condiția} \quad a^2 \leq A < (a + 1)^2.$$

Se notează

$$\sqrt{A} = a \text{ (rest } r).$$

Exemple.

$$\begin{aligned} 1) \quad \sqrt{82} &= 9 \text{ (rest 1) } \text{ căci } 9^2 < 82 < 10^2 \\ &\quad \text{și} \quad 82 = 9^2 + 1 \\ 2) \quad \sqrt{63} &= 7 \text{ (rest 14) } \text{ căci } 7^2 < 63 < 8^2 \\ &\quad \text{și} \quad 63 = 7^2 + 14 \end{aligned}$$

Dacă  $r = 0$  extragerea rădăcinii pătrate se face exact. Numerele din care rădăcina pătrată se extrage exact se numesc *pătrate perfecte*.

$$\text{Exemple. } \sqrt{121} = 11; \quad \sqrt{144} = 12; \quad \sqrt{169} = 13.$$

### Numere întregi

Fiind date  $a$  și  $b$ , numere naturale, dacă  $a < b$  scăderea  $a - b$  nu se poate efectua în mulțimea numerelor naturale  $[(a - b) \notin N]$ ; în acest caz numărul  $a - b$  se numește *număr întreg negativ*.

De exemplu  $7 - 9$  este un număr întreg negativ. Pentru a efectua scăderea, scădem mai întâi 7 unități din 7 (obținem 0) și mai avem de scăzut 2 unități. Acest lucru îl notăm  $-2$  și citim minus doi.

Numerele naturale le vom considera precedate de semnul  $+$  (plus) și le vom numi numere întregi pozitive.

Numerele negative apar în practică ca măsuri ale unor mărimi orientate.

$$\begin{aligned} \text{Exemple. Temperatura: } &+ 5 \text{ (5 grade deasupra lui 0),} \\ &- 15 \text{ (15 grade sub 0).} \end{aligned}$$

Altitudinea:  $+ 150$  (150 m deasupra nivelului mării),  
 $- 25$  (25 m sub nivelul mării).

Sume de bani:  $+ 500$  (un câștig de 500 lei),  
 $- 350$  (o datorie de 350 lei).

Valoarea absolută sau modulul unui număr  $a$  se notează  $|a|$ .

Valoarea absolută a unui număr pozitiv este chiar acel număr  $|a| = a$ , ( $a > 0$ ).

Valoarea absolută a unui număr negativ este acel număr luat cu semnul schimbat  
 $|a| = -a$  ( $a < 0$ ).

Valoarea absolută a numărului 0 este 0 ( $|0| = 0$ ).

Deci  $|a| \geq 0$ .

Exemple.  $|-5| = 5$ ;  $|+6| = 6$ ;  $|0| = 0$ ;  
 $|+7| = 7$ ;  $|-15| = 15$ ;  $|-3| = 3$ .

Două numere care au aceeași valoare absolută dar semne diferite se numesc opuse.

Exemple.  $+2$  și  $-2$ ;  $+5$  și  $-5$ ;  $-7$  și  $+7$ ;  $a$  și  $-a$ .

Mulțimea formată din numerele întregi pozitive (naturale) numărul zero, numerele întregi negative este mulțimea numerelor întregi:  $\dots -n, \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$

Numere întregi  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Numere întregi pozitive} \\ \text{numărul zero} \\ \text{numere întregi negative} \end{array} \right.$

Mulțimea numerelor naturale ( $N$ ) este inclusă în mulțimea numerelor întregi notată cu  $Z$

$$N \subset Z.$$

Orice număr pozitiv este mai mare decât 0; ( $+5 > 0$ ), orice număr negativ este mai mic decât 0 și mai mic decât orice număr pozitiv ( $-3 < 0$ ;  $-3 < 1$ ).

Dintre două numere negative acela este mai mare care este în valoare absolută mai mic.

$$-3 < -1, \quad |-3| > |-1|.$$

### Adunarea și scăderea numerelor întregi

**Regulă.** Pentru a aduna două numere întregi de același semn facem suma valorilor absolute ale celor două numere și la rezultat dăm semnul comun.

Pentru a aduna două numere întregi care nu au același semn facem diferența dintre valorile absolute ale celor două numere, scădem valoarea absolută mai mică din valoarea absolută mai mare și la rezultat dăm semnul numărului care are valoarea absolută mai mare.

Exemple.

- 1)  $(+5) + (+3) = +8$ ,  $|5| + |3| = 8$ ,
- 2)  $(-5) + (-3) = -8$ ,  $|-5| + |-3| = 8$ ,
- 3)  $(+5) + (-3) = +2$ ,  $|5| - |-3| = 5 - 3 = 2$ ,  
 $|5| > |-3|$ ,
- 4)  $(-5) + (+3) = -2$ ,  $|-5| - | +3| = 2$ ,  $|-5| > | +3|$ ,
- 5)  $(+5) + (-8) = -3$ ,  $|-8| - |5| = 3$ ,  $|-8| > |5|$ .



**Interpretarea regulii:** 1) Ce temperatură este acum dacă erau 5 grade deasupra lui zero (+5) și temperatura s-a mai urcat cu 3 grade?

Temperatura este de  $(5 + 3 = 8)$  8 grade deasupra lui 0, deci  $+8^\circ$ .

2) Temperatura a fost 5 grade sub zero ( $-5$ ) și a mai coborât cu 3 grade ( $-3$ ). Ce temperatură este acum?

Dacă de la  $-5$  a mai coborât 3 grade acum sînt  $(5 + 3 = 8)$  8 grade sub zero deci  $-8^\circ$ .

3) Temperatura a fost 5 grade deasupra lui zero și a coborât cu 3 grade ( $-3$ ). Ce temperatură este acum?

Dacă de la 5 grade a coborât 3 grade, avem  $(5 - 3 = 2)$  2 grade deasupra lui zero, deci  $+2^\circ$ .

4) Temperatura a fost 5 grade sub zero și s-a urcat cu 3 grade ( $+3$ ). Ce temperatură este acum?

Dacă s-a urcat cu 3 grade temperatura a devenit  $(5 - 3 = 2)$  2 grade sub zero, deci  $-2^\circ$ .

5) Temperatura a fost 5 grade deasupra lui zero și a scăzut cu 8 grade ( $-8$ ). Ce temperatură este acum?

Dacă temperatura a scăzut cu 5 grade ea a devenit zero grade; apoi a mai coborât 3 grade deci a devenit 3 grade sub zero, deci  $-3^\circ$ .

**Observări.** 1) Suma a două numere opuse este 0.  $(-5) + (5) = 0$ .

2) Adunarea are ca element neutru numărul zero:

$$a + 0 = a \text{ (} a \text{ aparține mulțimii numerelor întregi).}$$

3) Pentru simplificarea scrisului cînd avem de adunat mai multe numere întregi considerăm semnul de adunare (+) ca subînțeles între toți termenii, omitem parantezele și trecem toți termenii sumei succesiv cu semnele respective. Dacă primul termen al sumei este pozitiv putem omite semnul acestui termen.

De exemplu:  $S = (+7) + (-5) + (-3) + (+2)$   
se poate scrie

$$S = 7 - 5 - 3 + 2.$$

## Scăderea numerelor întregi

Scăderea numerelor întregi se definește la fel ca scăderea numerelor naturale.

Pentru a scădea un număr întreg  $b$  dintr-un număr întreg  $a$  adunăm la numărul  $a$  opusul scăzătorului ( $-b$ )

$$a - b = a + (-b).$$

În adevăr, în definiția scăderii se precizează că diferența trebuie să fie un număr care adunat cu scăzătorul ( $b$ ) să dea pe descăzut ( $a$ ) dar

$$a + (-b) + b = a - b + b = a$$

deci

$$a - b = a + (-b).$$

**Exemple.**

$$\begin{aligned} (+7) - (+3) &= 7 + (-3) = 7 - 3 = 4, \\ (-7) - (+3) &= -7 + (-3) = -7 - 3 = -10, \\ (-7) - (-3) &= -7 + (+3) = -7 + 3 = -4. \end{aligned}$$

**Observări.** 1) Prin  $7-3$  se poate deci înțelege sau diferența  $(+7) - (+3)$  sau suma  $(+7) + (-3)$ ; în ambele cazuri rezultatul este același  $(+4)$ .

2) Pentru a compara două numere naturale putem face diferența lor și aflăm cu cât este mai mare un număr decât alt număr.

În mulțimea numerelor întregi putem compara două numere  $a$  și  $b$  tot prin diferența  $a - b$  și anume:

1° Dacă  $a - b > 0$  atunci  $a > b$  ( $a$  mai mare decât  $b$ ).

2° Dacă  $a - b = 0$  atunci  $a = b$  ( $a$  egal cu  $b$ ).

3° Dacă  $a - b < 0$  atunci  $a < b$  ( $a$  mai mic decât  $b$ ).

**Exemple.** Să se compare numerele:

$(-5)$  și  $(-3)$ ;

$(-5)$  și  $(-13)$ ;

$(-5)$  și  $(+3)$ ;

$(-5) - (-3) = -5 + (+3) = -5 + 3 = -2 < 0$ , deci  $(-5) < (-3)$ ,

$(-5) - (-13) = -5 + (+13) = -5 + 13 = 8 > 0$ , deci  $(-5) > (-13)$ ,

$-5 - (+3) = -5 + (-3) = -5 - 3 = -8 < 0$ , deci  $(-5) < (+3)$ .

## Suma algebrică

**Definiție.** Suma algebrică este o sumă în care termenii (numere negative sau pozitive) sînt trecuți succesiv cu semnele corespunzătoare iar semnul de operație  $(+)$  dintre termeni este subînțeles.

De exemplu:  $(-5) + (-3) + (+7) - (-5) = -5 - 3 + 7 + 5$

$S = -5 - 3 + 7 + 5$  este o sumă algebrică.

Ea se efectuează ca și suma de numere naturale adunînd la primul termen al doilea termen, la rezultat al treilea ș.a.m.d.

**Proprietățile sumei algebrice: Comutativitatea.**

Într-o sumă algebrică putem schimba ordinea termenilor păstrînd semnul pe care-l au.

1)  $+5 + 3 = +3 + 5$

2)  $-5 - 3 = -3 - 5$

$-5 - 3 = -[|-5| + |-3|]$

Aplicînd comutativitatea adunării numerelor naturale

$$-(|-5| + |-3|) = -(|-3| + |-5|) = -3 - 5.$$

În general  $a + b + c = b + a + c = a + c + b$

unde  $a$ ,  $b$  și  $c$  sînt numere întregi.

**Asociativitatea.** Într-o sumă algebrică putem înlocui suma a doi sau mai mulți termeni cu rezultatul acestei sume.

$$(5 + 3) + 2 = 5 + (3 + 2).$$

În general:  $(a + b) + c = a + (b + c)$  în care  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sînt numere întregi.

**Consecințe.** Pentru a calcula o sumă algebrică putem aplica comutativitatea și asociativitatea, de exemplu; asociem toți termenii pozitivi și efectuăm suma; asociem toți termenii negativi și efectuăm suma și apoi facem suma algebrică a acestor două sume. Cînd în sumă există doi termeni opuși îi putem asocia și suma lor este 0.

**Exemple.** 1)  $17 - 15 + 25 - 30 = (17 + 25) + (-15 - 30) = 42 - 45 = -3$ .

2)  $17 - 15 - 17 + 10 = (17 - 17) + (-15 + 10) = -5$ .



Pe baza comutativității și asociativității adunării numerelor naturale, am dedus comutativitatea și asociativitatea sumei algebrice deci suma algebrică se va bucura de toate proprietățile sumei de numere naturale deduse pe baza celor două proprietăți de bază:

1. Pentru a aduna o sumă algebrică la un număr adunăm pe rând termenii sumei cu semnele respective.

$$a + (b + c + d) = a + b + c + d.$$

*Exemplu.*  $-17 + (-3 + 5 - 7) = -17 - 3 + 5 - 7 = -27 + 5 = -22.$

2. Pentru a scădea o sumă algebrică dintr-un număr se adună la acest număr toți termenii sumei cu semnul schimbat  $a - (b - c) = a - b + c.$

În adevăr, adunând același număr în ambii termeni ai diferenței, diferența nu se schimbă.

$$a - (b - c) = a + c - (b - c + c) = a + c - b \quad (\text{aplicând asociativitatea și } -c + c = 0).$$

Dar  $a + c - b = a - b + c$  (comutativitatea).

Deci:  $a - (b - c) = a - b + c.$

*Consecință.* Când avem de efectuat mai multe adunări și scăderi de sume algebrice suprimăm parantezele care au semnul plus înainte și trecem toți termenii din aceste sume cu semnele lor, suprimăm parantezele care au semnul minus înainte și trecem toți termenii din aceste sume cu semnele schimbate.

$$a + (b + c) - (-d + e) = a + b + c + d - e.$$

*Exemple.*  $5 + (-3 + 2) - (5 - 7) = 5 - 3 + 2 - 5 + 7 = (5 - 5) + 7 + 2 - 3 = 6.$

$$-(5 + 3 - 7) + (3 - 5) - (-2 + 7) = -5 - 3 + 7 + 3 - 5 + 2 - 7 = (-5 + 3 + 2) + (7 - 7) - 3 - 5 = -8.$$

*Observare.* În calculele numerice putem proceda pe baza convențiilor făcute la numerele naturale asupra ordinei operațiilor, efectuând calculele din paranteză.

*Exemple.*  $5 - (7 - 2 + 3) = 5 - (8) = 5 - 8 = -3$

$$(-7 + 5 - 3) - (-5 + 3 - 8) - (3 - 5 + 8) = -5 - (-10) - 6 = -5 + 10 - 6 = -1.$$

## Introducerea termenilor în paranteze

*Regulă.* Fiind dată o sumă algebrică putem închide doi sau mai mulți termeni într-o paranteză precedată de semnul  $+$  sau  $-$ . Dacă paranteza este precedată de semnul  $+$  scriem toți termenii cuprinși în paranteză cu semnele lor; dacă este precedată de semnul  $-$  termenii se trec cu semnele schimbate.

$$a + b + c + d = a + (b + c + d) = a - (-b - c - d).$$

*Exemple.*  $1) + 5 - 3 + 7 - 5 + 6 = 5 + (-3 + 7) - (+5 - 6).$

Termenii  $-3$ ,  $+7$  au fost trecuți cu semnele lor; termenii  $-5$ ,  $+6$  au fost trecuți cu semne schimbate căci paranteza a fost precedată de semnul  $-$ .

2)  $-17 - 32 + 2 - 5 - 7 = -17 + (-32 + 2) - (5 + 7).$

## Înmulțirea numerelor întregi

Produsul a două numere întregi este un număr întreg care are ca modul (valoare absolută) produsul modulelor și ca semn, semnul + dacă factorii au același semn, semnul - dacă factorii au semne contrare. Semnul de înmulțire este  $\times$  sau  $\cdot$  (un punct scris între numere).

Dacă numerele sînt puse în paranteză semnul de înmulțire se poate omite el se subînțelege. Exemplu:  $(-5) \times (-3) = (-5) \cdot (-3) = (-5) (-3) a \cdot b = ab$ .

*Exemple.*

*Semnul produsului.*

$$(+3) \cdot (+5) = +3 \cdot 5 = +15,$$

$$(-3) \cdot (-5) = +3 \cdot 5 = +15,$$

$$(-3) \cdot (+5) = -3 \cdot 5 = -15,$$

$$(+3) \cdot (-5) = -3 \cdot 5 = -15.$$

Deînmulțitul	Înmulțitorul	Produsul
+	+	+
-	-	+
-	+	-
+	-	-

*Consecințe.* 1) Numărul +1 este element neutru pentru înmulțire în mulțimea numerelor întregi.

$$a \cdot 1 = a.$$

2) Un număr întreg  $a$  înmulțit cu  $-1$  ne dă numărul opus  $a \cdot (-1) = -a$ .

3) Un număr întreg înmulțit cu 0 ne dă 0.

$$a \cdot 0 = 0.$$

4) Produsul de mai mulți factori este 0 dacă și numai dacă cel puțin unul din factori este zero.

Înmulțirea numerelor întregi se reduce de fapt la înmulțirea numerelor naturale deci se bucură de toate proprietățile înmulțirii numerelor naturale.

*Consecințe.* Un produs de mai mulți factori se poate efectua înmulțind primul factor cu al doilea rezultatul cu al treilea ș.a.m.d., dar se poate calcula (aplicînd comutativitatea și asociativitatea) asociînd factori care au același semn.

Produsul factorilor pozitivi va fi pozitiv; produsul factorilor negativi va fi pozitiv dacă avem un număr par de factori și negativ dacă avem un număr impar de factori. Produsul de mai mulți factori are semnul + dacă factorii negativi sînt în număr par și negativ dacă sînt în număr impar.

*Exemple.*

1)  $(-3) \cdot (+5) \cdot (-2) \cdot (+7) (-1) = -3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 1$  (am avut trei factori negativi).

2)  $(-5) \cdot (-7) (+3) (-2) (-10) = +5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10$  (am avut 4 factori negativi).

*Regulă.* Pentru  $a$  înmulți două sume algebrice înmulțim fiecare termen al unei sume cu toți termenii celeilalte și facem suma produselor obținute.

$$(a + b) \cdot (c - d) = ac + bc - ad - bd.$$

În adevăr, dacă notăm  $a + b = N$  avem:

$$(a + b) \cdot (c - d) = N(c - d). \text{ Aplicăm distributivitatea înmulțirii față de adunare.}$$



$$N(c - d) = Nc - Nd \quad \text{sau}$$

$$(a + b) \cdot (c - d) = (a + b)c - (a + b)d = ac + bc - (ad + bd),$$

$$(a + b) \cdot (c - d) = ac + bc - ad - bd.$$

*Exemple.*

$$1) (-5 + 7 - 3) \cdot (-3 + 2) = (-5) \cdot (-3) + (7) \cdot (-3) + (-3) \cdot (-3) + (-5) \cdot (2) + (7) \cdot (2) + (-3) \cdot (2) = 15 - 21 + 9 - 10 + 14 - 6 = 1.$$

În practică calculele se fac direct

$$2) (-5 + 3 - 6) \cdot (+5 - 3) = -25 + 15 - 30 + 15 - 9 + 18 = (-25 - 30 - 9) + (15 + 15 + 18) = -64 + 48 = -16.$$

*Observare.* Calculele se fac mai repede dacă aplicăm convențiile asupra ordinei operațiilor efectuând calculele din paranteze

$$1^\circ (-5 + 7 - 3) \cdot (-3 + 2) = (-1) \cdot (-1) = 1,$$

$$2^\circ (-5 + 3 - 6) \cdot (+5 - 3) = (-8) \cdot (+2) = -16.$$

*Regulă.* Pentru a înmulți un produs cu un număr sau mai multe produse formăm un singur produs cu toți factorii (suprimăm parantezele care închid produsul).

$$(a \cdot b \cdot c) \cdot d = a \cdot b \cdot c \cdot d,$$

$$d \cdot (a \cdot b) = d \cdot a \cdot b,$$

$$(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) \cdot (e \cdot f) = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f.$$

## Împărțirea numerelor întregi

În mulțimea numerelor întregi, fiind date două numere  $a$  și  $b \neq 0$ , a împărți numărul  $a$  la numărul  $b$  înseamnă a găsi un număr întreg  $q$  (cîțul) și un număr întreg  $r$  (restul) ( $0 \leq r < |b|$ ) astfel încît

$$1) a = bq + r.$$

Numerele  $a$  și  $b$  fiind date, există un singur număr  $q$  și un singur număr  $r$  ( $0 \leq r < |b|$ ) astfel ca relația 1) să fie satisfăcută.

*Exemple.*

$$1) (-5) : (-2) = +3 \text{ (rest 1) } \text{ căci } (-2) \cdot (+3) + 1 = -5$$

$$\text{și } 0 < 1 < |-2|.$$

$$2) 8 : (-5) = -1 \text{ (rest 3) } \text{ căci } (-5) \cdot (-1) + 3 = 8$$

$$\text{și } 0 < 3 < |-5|.$$

$$3) (-8) : (-5) = 2 \text{ (rest 2) } \text{ căci } (-5) \cdot (2) + 2 = -8$$

$$\text{și } 0 < 2 < |-5|.$$

$$4) (-7) : (2) = -4 \text{ (rest 1) } \text{ căci } 2 \cdot (-4) + 1 = -7$$

$$\text{și } 0 < 1 < 2.$$

*Împărțirea exactă.* Dacă la împărțirea numerelor întregi  $a$  și  $b \neq 0$ , obținem cîțul  $q$  și restul  $r = 0$ , împărțirea se face exact și relația 1) devine

$$1') a = bq.$$

*Regulă.* Pentru a împărți două numere întregi împărțim valorile lor absolute și dăm cîțului semnul + dacă ambele numere au același semn și semnul - dacă numerele sînt de semne contrare.

*Exemple.*

$$(+15) : (+3) = +5; (-15) : (-3) = +5; (+15) : (-3) = -5; \\ (-15) : (+3) = -5.$$

Împărțirea cu 0 nu are sens ca și în cazul numerelor naturale.

**Puterea** (cu exponent număr natural) unui număr întreg este un produs de factori egali

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}$$

$$1) a > 0 \Rightarrow a^n > 0;$$

$$2) a = 0 \Rightarrow a^n = 0; 0^n = 0. \quad (n \neq 0).$$

$$3) a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^n > 0 \text{ dacă } n \text{ este număr par} \\ a^n < 0 \text{ dacă } n \text{ este număr impar.} \end{cases}$$

Puterea unui număr pozitiv este totdeauna un număr pozitiv; puterea unui număr negativ este un număr pozitiv dacă exponentul este număr par și negativ dacă exponentul este număr impar.

$$\text{Exemple. } (+5)^3 = (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) = 5^3 = 125,$$

$$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = +25,$$

$$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -(3)^5 = -243.$$

Operațiile cu puteri ale numerelor întregi se efectuează după regulile cunoscute de la puterile numerelor naturale.

$$1) a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad m, n \in \mathbb{N}; a \text{ aparține mulțimii numerelor întregi}$$

$$2) a^m : a^n = a^{m-n} \text{ dacă } m - n > 0$$

$$3) a^m : a^m = a^0 = 1 \quad (a \neq 0). \text{ Orice număr întreg diferit de zero ridicat la puterea 0 este egal cu 1.}$$

$$4) (a^m)^n = a^{mn}.$$

$$\text{Exemple. } (-5)^3 \cdot (-5)^2 = (-5)^{3+2} = (-5)^5 = -5^5 = -3125.$$

$$(-2)^4 : (-2)^2 = (-2)^{4-2} = (-2)^2 = 2^2 = 4.$$

$$(-3)^4 : (-3)^4 = (-3)^0 = 1.$$

$$[(-3)^2]^3 = (-3)^6 = 729.$$

## Numere fracționare

Numim *unitate fracționară* o parte dintr-o mărime — considerată ca unitate întreagă — care a fost împărțită într-un număr de părți egale. A  $n$ -a parte dintr-o unitate întreagă se notează  $\frac{1}{n}$ .

Numărul format din una sau mai multe unități fracționare se numește fracție și se notează  $\frac{m}{n}$ ;  $n$  se numește *numitor* — el arată în câte părți egale a fost împărțită unitatea întreagă —  $m$  se numește *numărător* — el arată câte unități fracționare are numărul  $\frac{m}{n}$ .





Fig. 5

*Exemple.*  $\frac{3}{4}$  (3 unități fracționare cu numitorul 4) trei pătrimi.

Același rezultat se obține dacă se ia a patra parte din trei unități întregi deci cîțul  $3:4$  reprezintă aceeași parte din întregul considerat (fig. 5).

Cîțul a două numere naturale  $a, b$  notat  $a:b$  sau  $\frac{a}{b}$  se numește *număr fracționar*.

Dacă  $\frac{a}{b} = c$ ,  $c \in N$  ( $c$  număr natural) atunci cîțul  $\frac{a}{b}$  este un număr natural.

*Exemplu.*  $\frac{6}{3} = 2$ .

Mulțimea numerelor naturale ( $N$ ) este inclusă în mulțimea numerelor fracționare.

*Fracții echivalente.* Frațiile  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  se numesc echivalente dacă  $ad = bc$ .

*Exemplu.*  $\frac{3}{4}$  este echivalent cu  $\frac{6}{8}$  căci

$$3 \cdot 8 = 6 \cdot 4.$$

Fracțiile  $\frac{3}{4}$  și  $\frac{6}{8}$  reprezintă de fapt aceeași parte din unitatea considerată (fig. 6).

Se obișnuiește să se spună că aceste părți sînt egale în sensul că reprezintă aceeași parte din unitatea întreagă. În acest sens în locul semnului de echivalență se folosește semnul de egalitate pe care-l vom folosi și noi.

## Compararea fracțiilor cu unitatea

### 1. Fracții mai mici decît unitatea — *subunitare*.

Dacă numărătorul fracției este mai mic decît numitorul atunci fracția este *subunitară* (mai mică decît unitatea). Exemple.  $\frac{2}{5}$  (întregul are 5 cincimi și am luat numai 2 cincimi);  $\frac{3}{7}$  (întregul are 7 șeptimi și am luat numai 3 șeptimi).

### 2. Fracții echivalente cu unitatea întreagă — *echiunitare*.

Dacă numărătorul este egal cu numitorul atunci fracția este *echiunitară* (egală cu unitatea).

*Exemple.*  $\frac{5}{5}$  (întregul s-a împărțit în 5 părți egale și

le-am luat pe toate 5);  $\frac{7}{7}; \frac{11}{11}$ .

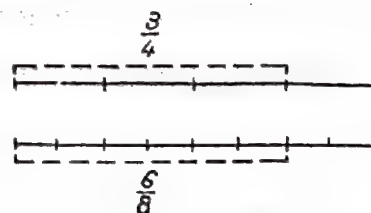


Fig. 6

### 3. Frații mai mari decât unitatea — supraunitare.

Dacă numărătorul este mai mare decât numitorul, atunci fracția este *supraunitară* (mai mare decât unitatea).

*Exemple.*  $\frac{7}{5}$  (întregul s-a împărțit în 5 părți egale dar s-au luat 7 asemenea părți)  $\frac{11}{7}$ ;  $\frac{13}{2}$  ș.a.m.d.

*Scoaterea întregilor din fracție.* Pentru a scoate întregii dintr-o fracție supraunitară vedem câte grupe, de atâtea unități fracționare cât arată numitorul, se pot forma din numărul unităților fracționare ale numărului. Obținem astfel numărul întregilor la care se adaugă numărul unităților fracționare rămase.

De exemplu  $\frac{17}{5}$  conțin 3 întregi și au rămas 2 cincimi deci  $\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$ . În locul sumei  $3 + \frac{2}{5}$  se scrie  $3\frac{2}{5}$  subînțelegându-se semnul + de adunare între numărul întreg (3) și partea fracționară ( $\frac{2}{5}$ ). Numărul format dintr-o parte întreagă și o parte fracționară se numește *număr mixt*.

$\frac{15}{7}$  conțin 2 întregi [ $15 : 7 = 2$  (rest 1)] și o unitate fracționară. Scriem  $\frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$ .

$\frac{17}{6}$  [ $17 : 6 = 2$  (rest 5)]. Așadar  $\frac{17}{6} = 2\frac{5}{6}$ .

*Transformarea numărului mixt în fracție — introducerea întregilor în fracție.*

Pentru a introduce întregii în fracție înmulțim numărul întregilor cu numitorul și la produs adăugăm numărătorul, iar ca numitor dăm numitorul fracției.

*Exemple.*  $2\frac{3}{5}$  Transformăm întregii în cincimi; 1 întreg are 5 cincimi deci 2 întregi vor avea ( $2 \cdot 5 = 10$ ) 10 cincimi; la 10 cincimi se adaugă 3 cincimi de la fracție

$$2\frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3}{5}; \quad 2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$$

$$5\frac{2}{7} = \frac{5 \cdot 7 + 2}{7}; \quad 5\frac{2}{7} = \frac{37}{7}.$$

### Proprietățile fracțiilor

- 1) Dacă înmulțim (împărțim) numărătorul unei fracții cu un număr natural, fracția se mărește (micșorează) de acel număr de ori.
- 2) Dacă înmulțim (împărțim) numitorul unei fracții cu un număr natural, fracția se micșorează (mărește) de acel număr de ori.
- 3) Dacă înmulțim și numărătorul și numitorul unei fracții cu același număr, diferit de zero, obținem o fracție echivalentă. Operația se numește *amplificarea fracției*.

Fracția  $\frac{a}{b}$  este echivalentă cu  $\frac{am}{bm}$  căci

$$a \cdot bm = b \cdot am.$$

*Exemple.*  $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3}$ ;  $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$  căci  $2 \cdot 15 = 5 \cdot 6$ .



4) Dacă împărțim, și numărătorul și numitorul unei fracții cu același număr diferit de zero obținem o fracție echivalentă. Operația se numește *simplificarea fracției*.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m} \text{ căci } a(b : m) = b(a : m)$$

Exemple.  $\frac{4}{12} = \frac{4 : 2}{12 : 2}; \frac{4}{12} = \frac{2}{6}$  căci  $4 \cdot 6 = 2 \cdot 12$ .

$\frac{15}{18} = \frac{15 : 3}{18 : 3}; \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$  căci  $15 \cdot 6 = 18 \cdot 5$ .

O fracție care nu se poate simplifica (numărătorul și numitorul nu se împart exact cu un număr diferit de 1, sînt *numere prime între ele*) se numește fracție *ireductibilă*.

Exemple.  $\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{11}{18}$ .

### Compararea a două fracții

a) *Fracții cu același numitor*. Dintre două fracții care au același numitor este mai mare fracția care are numărătorul mai mare (are mai multe unități fracționare de același fel)

$$\frac{3}{5} < \frac{4}{5}; \quad \frac{7}{11} > \frac{5}{11}.$$

b) *Fracții cu același numărător*. Dintre două fracții care au același numărător mai mare este fracția care are numitorul mai mic (unitățile fracționare sînt mai mari).

$$\frac{4}{7} > \frac{4}{9}; \quad \frac{5}{13} < \frac{5}{11}.$$

c) *Fracții oarecare*. Pentru a compara două fracții le aducem la același numitor sau la același numărător apoi le comparăm.

Observări. 1) O fracție supraunitară este mai mare decît orice fracție subunitară.

2) Două fracții se pot compara uneori mai simplu, comparînd fracțiile care le completează pînă la un întreg.

Exemple. 1)  $\frac{12}{13}$  și  $\frac{7}{8}$ . La  $\frac{12}{13}$  lipsește  $\frac{1}{13}$  pentru a face 1. La  $\frac{7}{8}$  lipsește  $\frac{1}{8}$  pentru a face 1.  $\frac{1}{13} < \frac{1}{8}$ .

Deci  $\frac{12}{13} > \frac{7}{8}$ , căci fracției  $\frac{12}{13}$  îi trebuie mai puțin decît fracției  $\frac{7}{8}$  pentru a forma un întreg.

2)  $\frac{11}{15}$  și  $\frac{3}{7}$ . La  $\frac{11}{15}$  lipsesc  $\frac{4}{15}$  pentru a face 1. La  $\frac{3}{7}$  lipsesc  $\frac{4}{7}$  pentru a face 1.  $\frac{4}{15} < \frac{4}{7}$  deci  $\frac{11}{15} > \frac{3}{7}$ .

## Operații cu numere fracționare

1. *Adunarea fracțiilor.* Suma a două fracții care au același numitor  $\frac{a}{b}$  și  $\frac{c}{b}$  este fracția  $\frac{a+c}{b}$ ;

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}.$$

Adunarea fracțiilor este totdeauna posibilă.

2. *Scăderea fracțiilor.* Scăderea este operația inversă adunării. A scădea o fracție  $\frac{c}{b}$  dintr-o fracție  $\frac{a}{b}$  înseamnă a găsi o fracție care adunată cu  $\frac{c}{b}$  să dea  $\frac{a}{b}$ .

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b} \text{ pentru că}$$

$$\frac{a-c}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a-c+c}{b} = \frac{a}{b}.$$

Scăderea fracțiilor este posibilă dacă  $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{b}$  ( $a - c \geq 0$ ).

Elementul neutru la adunarea fracțiilor este 0.

$$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}.$$

Dacă fracțiile nu au același numitor, le înlocuim cu fracții echivalente care au același numitor și apoi le adunăm (scădem).

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{db} \text{ unde numitorul comun este } bd \text{ (produsul numitorilor).}$$

*Proprietățile adunării fracțiilor.* Adunarea fracțiilor se reduce la adunarea unor numere naturale deci se bucură de proprietățile adunării numerelor naturale: *comutativitatea și asociativitatea.*

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d} = \frac{b+a}{d} = \frac{b}{d} + \frac{a}{d}.$$

$$\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\right) + \frac{c}{d} = \frac{a+b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{(a+b)+c}{d} = \frac{a+(b+c)}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b+c}{d} = \frac{a}{d} + \left(\frac{b}{d} + \frac{c}{d}\right).$$

3. *Înmulțirea fracțiilor.* Produsul a două fracții  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$  este o fracție  $\frac{ac}{bd}$ .

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Elementul neutru la înmulțire este 1;  $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$ .

Înmulțirea este totdeauna posibilă în mulțimea numerelor fracționare.

*Observări.* 1) Ca și la înmulțirea numerelor întregi  $\frac{a}{b}$  și  $\frac{c}{d}$  se numesc factori.

2) Produsul  $\frac{ac}{bd}$  este echivalent cu produsul a două fracții echivalente respectiv cu

$$\frac{a}{b} \text{ și } \frac{c}{d}.$$



*Exemplu.*  $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{14} = \frac{6}{84} = \frac{1}{14}$ ;  $\frac{3:3}{6:3} \cdot \frac{2:2}{14:2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{14}$ .

3) Produsul unei fracții  $\frac{a}{b}$  cu un număr natural este suma de  $n$  termeni egali cu  $\frac{a}{b}$ .

$$\frac{a}{b} \cdot n = \underbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots + \frac{a}{b}}_{n \text{ termeni}} = \frac{a + a + \dots + a}{b} = \frac{a \cdot n}{b}.$$

Pentru a înmulți o fracție cu un număr natural, înmulțim numărătorul cu acel număr și dăm ca numitor numitorul fracției.

4) Utilizăm înmulțirea unui număr cu o fracție când vrem să aflăm acea fracție din număr.

*Exemplu.*  $\frac{3}{5}$  din 150 este  $150 \cdot \frac{3}{5} = \frac{150 \cdot 3}{5} = 90$ .

5) Înmulțirea a două numere mixte se reduce la înmulțirea fracțiilor obținute prin introducerea întregilor în fracție.

*Exemplu.*  $3\frac{5}{7} \cdot 1\frac{2}{5} = \frac{26}{7} \cdot \frac{7}{5} = \frac{26}{5}$ .

**Proprietățile înmulțirii fracțiilor.** Înmulțirea fracțiilor reducându-se la înmulțirea numerelor naturale, se va bucura de proprietățile înmulțirii numerelor naturale: comutativitatea și asociativitatea.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}.$$

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a(ce)}{b(df)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{ce}{df} = \frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right).$$

Se aplică de asemenea distributivitatea înmulțirii față de adunare (scădere)

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \pm \frac{e}{d}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c \pm e}{d} = \frac{a(c \pm e)}{bd} = \frac{ac}{bd} \pm \frac{ae}{bd}.$$

**Împărțirea fracțiilor ordinare** este operație inversă înmulțirii. Cîtu a două fracții ordinare  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d}$  este totdeauna o fracție ordinară  $\frac{ad}{bc}$  ( $\frac{c}{d} \neq 0$ ).

În adevăr, a împărți o fracție  $\frac{a}{b}$  la fracția  $\frac{c}{d}$ , înseamnă a găsi o fracție  $\frac{m}{n}$  astfel încît  $\frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ .

Fracția  $\frac{m}{n}$  este echivalentă cu  $\frac{ad}{bc}$ , căci  $\frac{c}{d} \cdot \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b}$ . Am simplificat fracția prin  $(c \cdot d)$ .

**Regulă.** Pentru a împărți o fracție  $\frac{a}{b}$  la o fracție  $\frac{c}{d}$ , înmulțim fracția  $\frac{a}{b}$  cu fracția  $\frac{d}{c}$  (inversa fracției  $\frac{c}{d}$ ). Fracția  $\frac{d}{c}$  se obține din împărțirea  $1 : \frac{c}{d}$ .

*Exemple.* 1)  $\frac{3}{5} : \frac{15}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{15} = \frac{7}{25}$ .

$$2) \frac{5}{17} : \frac{2}{17} = \frac{5}{17} \cdot \frac{17}{2} = \frac{5}{2}.$$

Știind că  $\frac{2}{5}$  dintr-un număr  $N$  valorează 10, să se afle numărul.  $N = 10 : \frac{2}{5} = 25$ .

Pentru a împărți două numere mixte introducem întregii în fracții apoi împărțim fracțiile obținute.

$$\text{Exemplu. } 1\frac{3}{7} : 2\frac{2}{3} = \frac{10}{7} : \frac{8}{3} = \frac{10}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{28}.$$

*Observări. 1. Împărțirea unui număr cu 0 (zero).*

a) Dacă  $a$  și  $b$  sînt numere pozitive și  $\frac{a}{b} = c$ , micșorînd împărțitorul  $b$  de un număr de ori, cîțul  $c$  se mărește de același număr de ori. Dacă micșorăm împărțitorul din ce în ce mai mult, cîțul se mărește din ce în ce mai mult. Dacă împărțitorul devine foarte mic, foarte aproape de zero, cîțul devine foarte mare, mai mare decît orice număr ales. Zicem că  $\frac{a}{b}$  tinde către infinit ( $\infty$ ).

b) Dacă  $a < 0$  și  $b > 0$  micșorînd pe  $b$  din ce în ce mai mult  $|c|$  se mărește din ce în ce mai mult iar  $c$  se micșorează din ce în ce mai mult.

Cînd  $b$  se apropie de zero,  $|c|$  tinde către infinit. În acest caz spunem că  $\frac{a}{b}$  tinde către  $-\infty$  (minus infinit).

*Exemple.*

1)  $1 : 10 = \frac{1}{10}$ ;  $1 : 1 = 1$ ;  $1 : \frac{1}{10} = 10$ ;  $1 : \frac{1}{10^3} = 1000$ ;  $1 : \frac{1}{10^5} = 10^5$ ;  
 $1 : \frac{1}{10^6} = 10^6$  (un milion);  $1 : \frac{1}{10^9} = 10^9$  (un miliard)  $1 : \frac{1}{10^{12}} = 10^{12}$  (un trilion)  
 ș.a.m.d.  $1 : \frac{1}{10^n} = 10^n$  ( $n$  număr natural).

$$2) (-1) : 10 = -\frac{1}{10}; (-1) : \frac{1}{10} = -10; (-1) : \frac{1}{10^n} = -10^n.$$

2. La împărțirea fracțiilor putem împărți numărătorii între ei și numitorii între ei, dacă împărțirile se fac exact.

$$\text{Exemplu. } \frac{18}{25} : \frac{9}{5} = \frac{3}{5}, \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d}. \text{ În adevăr } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

$$\frac{a : c}{b : d} = \frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

3. Împărțirea a două fracții este totdeauna posibilă (dacă împărțitorul este diferit de zero).

*Ridicarea unei fracții la o putere.* A ridica o fracție  $\frac{a}{b}$  la o putere cu exponentul  $n$ , număr natural, înseamnă a găsi o fracție  $\frac{A}{B}$  astfel ca  $\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ .

Dacă  $n$  este număr natural, avem totdeauna

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$



În adevăr,  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ factori}} = \frac{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}{b \cdot b \cdot \dots \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}.$

*Extragerea rădăcinii pătrate dintr-o fracție.* Pentru a extrage rădăcina din fracția  $\frac{a}{b}$ , extragem rădăcina pătrată din numărătorul și numitorul fracției

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Putem amplifica fracția  $\frac{a}{b}$  astfel încât numitorul să fie pătrat perfect atunci

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}. \text{ Notînd } \sqrt{ab} = c \text{ (rest } r),$$

avem

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{c}{b} \left( \text{rest } \frac{r}{b^2} \right)$$

*Exemple.*

$$1) \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}, \sqrt{17} = 4 \text{ (rest } 1).$$

$$\sqrt{\frac{17}{4}} = 2 \left( \text{rest } \frac{1}{4} \right). \text{ În adevăr } \frac{17}{4} = 2^2 + \frac{1}{4}.$$

$$2) \sqrt{\frac{13}{5}} = \sqrt{\frac{13 \cdot 5}{5^2}} = \frac{\sqrt{65}}{5} = \frac{8}{5} \left( \text{rest } \frac{1}{25} \right)$$

$$\text{În adevăr, } \frac{13}{5} = \frac{64}{25} + \frac{1}{25}; \frac{13}{5} = \frac{65}{25}.$$

$$3) \sqrt{\frac{17}{18}} = \sqrt{\frac{17 \cdot 2}{36}} = \frac{\sqrt{34}}{6} = \frac{5}{6} \text{ rest } \frac{9}{36}.$$

$$\text{În adevăr, } \frac{17}{18} = \frac{25}{36} + \frac{9}{36}; \frac{17}{18} = \frac{34}{36}.$$

*Observare.* Dacă nu vedem direct cu ce număr trebuie amplificată fracția  $\frac{a}{b}$  pentru a obține la numitor un pătrat perfect, este bine să descompunem numitorul în factori scoțînd în evidență factorii pătrate perfecte.

$$\text{Exemple. } \sqrt{\frac{1}{468}} = \sqrt{\frac{1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 13}} = \sqrt{\frac{13}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 13^2}} = \frac{\sqrt{13}}{2 \cdot 3 \cdot 13} = \frac{\sqrt{13}}{78}.$$

$$\sqrt{\frac{1}{468}} = \frac{3}{78} \left( \text{rest } \frac{4}{78^2} \right).$$

$$\text{În adevăr } \frac{1}{468} = \frac{9}{78^2} + \frac{4}{78^2} = \frac{13}{78^2}.$$

## Numere raționale

Cîtul a două numere întregi  $\frac{a}{b}$  ( $b \neq 0$ ) se numește număr rațional.

Dacă  $|a|$  se împarte exact la  $|b|$  atunci  $\frac{a}{b}$  este număr întreg. Dacă  $a$  și  $b$  au același semn, atunci  $\frac{a}{b}$  este o fracție pozitivă.

Mulțimea numerelor întregi ( $Z$ ) este inclusă în mulțimea ( $Q$ ) a numerelor raționale.

Mulțimea fracțiilor pozitive este inclusă în mulțimea ( $Q$ ) a numerelor raționale.

Între mulțimea numerelor naturale ( $N$ ), mulțimea numerelor întregi ( $Z$ ) și mulțimea numerelor raționale ( $Q$ ) există relații de incluziune

$$N \subset Z \subset Q.$$

Două numere raționale  $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$  sînt echivalente dacă  $ad = cb$ .

## Operații cu numere raționale

Suma a două numere raționale  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  este totdeauna un număr rațional echivalent cu  $\frac{ad + bc}{bd}$ .

Diferența a două numere raționale  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  este totdeauna un număr rațional echivalent cu  $\frac{ad - bc}{bd}$ .

Suma numerelor raționale reducîndu-se la o sumă de numere întregi (numărătorii numerelor raționale aduse la același numitor) se bucură de proprietățile adunării numerelor întregi (comutativitatea, asociativitatea).

Elementul neutru față de adunarea numerelor raționale este 0 (zero).

Produsul a două numere raționale  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  este totdeauna un număr rațional echivalent cu  $\frac{ac}{bd}$ .

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Înmulțirea numerelor raționale se bucură de proprietățile înmulțirii numerelor întregi: comutativitatea, asociativitatea, distributivitatea față de adunare și scădere.

Elementul neutru față de înmulțirea numerelor raționale este numărul 1.

Cîtul a două numere raționale  $\frac{a}{b}$  și  $\frac{c}{d}$  ( $\frac{c}{d} \neq 0$ ) este totdeauna un număr rațional echivalent cu  $\frac{ad}{bc}$ .

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$



A ridica un număr rațional la o putere  $n$  (număr natural) înseamnă a face înmulțirea

$$\underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ factori}} = \frac{a \cdot a \cdots a}{b \cdot b \cdots b} = \frac{a^n}{b^n} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Deci puterea unui număr rațional este tot un număr rațional.

Exemple.  $\left(\frac{-3}{5}\right)^2 = \frac{(-3)^2}{5^2} = \frac{9}{25};$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{(-3)^3}{5^3} = \frac{-27}{125}.$$

În mulțimea numerelor raționale nu putem extrage rădăcina pătrată dintr-un număr negativ căci orice număr rațional ridicat la pătrat este pozitiv.

**Ordinea operațiilor.** În efectuarea calculelor cu numere raționale păstrăm convențiile făcute la operațiile cu numere naturale.

Exemple.

1)  $E = (-15) + (-3) \cdot (-2) - 15 : (-3).$  Efectuăm operațiile de ordinul II.

$$E = (-15) + (+6) - (-5).$$

$$E = -15 + 6 + 5 = -4.$$

Efectuăm operațiile de ordinul I

2)  $E = (-3)^3 - (-10) : (+5) + (-2) \cdot (-3).$  Efectuăm operațiile de ordinul III apoi pe cele de ordinul II. Efectuăm operațiile de ordinul I.

$$E = -27 - (-2) + (+6).$$

$$E = -27 + 2 + 6 = -19$$

3)  $E = (-2)^2 : 4 - (5)^2 \cdot (-2)^3 + (-5) (-2)^2.$  Efectuăm ridicările la putere. Efectuăm înmulțirile și împărțirile.

$$E = 4 : 4 - (25) (-8) + (-5) \cdot 4.$$

$$E = 1 - (-200) - 20.$$

$$E = 1 + 200 - 20 = 181.$$

Efectuăm scăderea și adunarea.

4)  $E = \{5 - [-7 + (-3)^2 (-2)]\} : (-6).$

Avem de împărțit o diferență la un număr. Ultima operație pe care o efectuăm este împărțirea. În acoladă descăzutul este un număr, scăzătorul o sumă.

$$-7 + (-3)^2 (-2) = -7 + (+9) (-2) = -7 - 18.$$

Expresia  $E$  devine

$$E = [5 - (-7 - 18)] : (-6).$$

$$E = (5 + 7 + 18) : (-6).$$

$$E = +30 : (-6) = -5.$$

Efectuăm diferența.

Efectuăm suma din paranteză.

5)  $E = -15 - \{(-3)^2 + [(-5) \cdot (-2) - (-2)^3] (-3)\}.$

Avem de efectuat o diferență (ultima operație este o scădere). Descăzutul este un număr; scăzătorul este o sumă. Efectuăm această sumă calculând mai întâi operațiile de ordinul III și II apoi pe cele de ordinul I.

$$E = -15 - \{(-3)^2 + [10 - (-8)] \cdot (-3)\};$$

$$E = -15 - [(-3)^2 + (10 + 8) \cdot (-3)].$$

Acum avem de calculat o diferență al cărui scăzător este o sumă algebrică (ultima operație este de adunare). Efectuăm operațiile de ordinul III și suma din paranteza mică.

$$E = -15 - [9 + 18 \cdot (-3)]. \text{ Efectuăm calculele din paranteză.}$$

$$E = -15 - (9 - 54). \quad \text{Efectuăm scăderea unei sume dintr-un număr.}$$

$$E = -15 - 9 + 54 = +30.$$

## Reprezentarea numerelor raționale pe axă

Numim axă, o dreaptă pe care s-au fixat: un punct  $O$  numit origine, un sens pozitiv de parcurgere a axei și un segment luat ca unitate de măsură.

Punctului  $O$  îi corespunde numărul 0 (zero); punctului  $A$  așezat pe axă la dreapta originii, la o distanță egală cu unitatea de măsură aleasă, îi corespunde numărul 1 ș.a.m.d. Fiecărui număr natural îi corespunde un singur punct pe axă.

Punctele corespunzătoare numerelor negative  $-1, -2, -3, \dots$  sînt simetrice față de origine cu punctele corespunzătoare numerelor  $1, 2, 3, \dots$

Fiecărui număr întreg îi corespunde un punct pe axă. Există însă puncte pe axă care nu corespund unor numere întregi.

Orice număr rațional,  $\frac{a}{b}$ , poate fi reprezentat printr-un punct pe axă.

De exemplu,  $\frac{3}{7}$  se reprezintă împărțind segmentul  $OA$  în 7 părți egale și luînd 3 părți; numărul  $-\frac{3}{7}$  corespunde simetricului punctului  $\frac{3}{7}$  față de origine.

*Observare.* Există însă puncte pe axă cărora nu le corespund numere raționale (unitatea de măsură fiind dată). De exemplu, punctului aflat la o distanță egală cu diagonala pătratului cu latura cît unitatea de măsură, nu-i corespunde un număr rațional ci numărul  $\sqrt{2}$  care nu este de forma  $\frac{a}{b}$ .

Numerele care nu pot fi scrise sub forma unui cît de două numere întregi se numesc numere *iraționale*. Exemplu.  $\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{3}$ ,  $\pi$ ,  $-\sqrt{7}$ ...

Mulțimea numerelor raționale reunită cu mulțimea numerelor iraționale formează mulțimea numerelor reale,  $R$ .

Între mulțimea numerelor reale și mulțimea punctelor axei se poate stabili o corespondență biunivocă.

## Compararea numerelor raționale

Două numere raționale pot fi egale sau diferite.

Dacă  $a = b$  înseamnă că  $a$  și  $b$  sînt reprezentate pe axa numerelor prin același punct.

Dacă  $a \neq b$  se poate ca: 1)  $a$  să fie mai mic decît  $b$ ;  $a < b$ . În acest caz  $b$  este situat pe axă la dreapta punctului care îl reprezintă pe  $a$ .

2)  $a$  mai mare decît  $b$ ;  $a > b$ . În acest caz  $b$  este situat pe axă la stînga lui  $a$ .  $a > b$  sau  $a < b$  se numesc inegalități.

Egalitățile și inegalitățile se bucură de unele proprietăți utile în calcule:

1) Dacă adunăm sau scădem un număr în ambii membri ai unei egalități obținem tot o egalitate.

1) Dacă adunăm sau scădem un număr în ambii membri ai unei inegalități obținem o inegalitate de același sens.



*Exemple.*  $-2 = -3 + 1.$

$$-2 + 1 = -3 + 1 + 1; \quad -1 = -1;$$

$$-2 - 5 = -3 + 1 - 5; \quad -7 = -7.$$

2) Dacă adunăm membru cu membru mai multe egalități, obținem tot o egalitate.

*Exemplu.*  $5 = 3 + 2,$

$$-3 = -1 - 2$$

$$-1 = -2 + 1$$

$$5 - 3 - 1 = 3 + 2 - 1 - 2 - 2 + 1.$$

$$1 = 1.$$

3) Dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei egalități cu un număr (diferit de zero), se obține tot o egalitate.

*Exemplu.*  $15 = 10 + 5;$

$$15 \cdot 2 = (10 + 5) \cdot 2;$$

$$15 : 5 = (10 + 5) : 5.$$

*Exemple.*  $5 > 3.$

$$5 + 1 > 3 + 1; \quad 6 > 4;$$

$$5 - 3 > 3 - 3; \quad 2 > 0.$$

2) Dacă adunăm membru cu membru două sau mai multe inegalități de același sens, obținem o inegalitate de același sens.

*Exemplu.*  $5 > 3$

$$-1 > -2$$

$$2 > -1$$

$$5 - 1 + 2 > 3 - 2 - 1$$

$$6 > 0$$

3) Dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei inegalități cu un număr pozitiv, inegalitatea își păstrează sensul. Dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei inegalități cu un număr negativ, inegalitatea își schimbă sensul.

*Exemplu.*  $15 > 10.$

$$15 : 5 > 10 : 5; \quad 3 > 2;$$

$$15 : (-5) < 10 : (-5); \quad -3 < -2.$$

## II

# Numerafia

### Sistem zecimal de numerație

1° Pentru scrierea unui număr în sistemul zecimal se folosesc zece semne sau cifre.

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Numerele 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 sînt unități simple (de ordinul I).

2° Zece unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat superior.

O grupă de zece unități simple (de ordinul I) formează o zece (o unitate de ordinul II); o grupă de zece zeci (unități de ordinul II) formează o sută (o unitate de ordinul III) ș.a.m.d.

3° O cifră poate reprezenta unități de diferite ordine după locul pe care-l ocupă în număr. De exemplu, în numărul 72 563 cifra 3 reprezintă unități simple, cifra 6, zeci, cifra 5, sute, cifra 2, unități de mii, cifra 7, zeci de mii.

$$72563 = 7 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 3$$

sau

$$72563 = 7 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 3.$$

În general un număr natural  $N$  (în baza 10) care are în ordine de la dreapta spre stînga cifrele  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$  se poate scrie

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + 10^3 a_3 + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0.$$

4° Trei ordine succesive pornind de la dreapta spre stînga (unități, zeci, sute) formează o clasă (clasa unităților, clasa miilor, clasa milioane, clasa miliardelor; clasa trilioanelor ș.a.m.d.).

*Observare.* Există și alte sisteme de numerație care au altă bază. Pentru a scrie numerele într-o anumită bază folosim atîtea semne (cifre) cîte unități are baza: un număr de unități (de un anumit ordin) egal cu baza formează o unitate de ordin superior.

De exemplu, pentru scrierea numerelor în baza 2 folosim 2 semne (cifre): 0 și 1; 2 unități simple formează în baza 2, o unitate de ordinul II și se scrie 10.

Dacă avem o mulțime cu 7 elemente putem forma 3 grupe de cîte două elemente și rămîne un element negrupat. Obținem deci o unitate de ordinul I și 3 unități de ordinul II. Grupăm două unități de ordinul II (două grupe de cîte două elemente) și rămîne o unitate de ordinul II negrupată, se obține deci o unitate de ordinul II și o unitate de ordinul III. Numărul 7 se scrie 111 (în sistemul cu bază 2).



Dacă baza este 9 vom folosi 9 semne (cifre) : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. De exemplu numărul 112 se scrie (în baza 9) 134 căci  $112 = 9^2 + 3 \cdot 9 + 4$ .

Dacă baza este mai mare decât 10 vom introduce semne noi. De exemplu, dacă baza sistemului de numerație este 12 vom introduce, în afara celor 10 semne cunoscute, alte două semne noi, de exemplu  $\alpha$  și  $\beta$ . Numărul 275 se scrie (în baza 12)  $1 \alpha \beta$  căci  $275 = 12^2 + 10 \cdot 12 + 11$ ; iar 10 este notat  $\alpha$  și 11 este notat  $\beta$ .

### Scrierea și citirea numerelor naturale

Pentru a scrie un număr natural scriem cifrele în ordine de la stînga la dreapta începînd cu ordinul cel mai mare al numărului. Se obișnuiește ca între diferitele clase ale numărului să se lase un spațiu. De exemplu: 72 123 256.

Citirea numerelor se face pe ordine și clase începînd de la stînga la dreapta. 72 123 256 se citește 72 milioane 123 mii 256.

2 056 123 001 123 se citește 2 trilioane, 56 miliarde, 123 milioane, o mie, 123

### Numere zecimale

1. Frația ordinară care are numitorul o putere a lui 10 cu exponent număr natural se numește *fracție zecimală*  $\frac{a}{10^n}$  ( $a$  și  $n$  numere naturale).

2. Orice fracție ordinară ireductibilă echivalentă cu o fracție zecimală, are la numitor numai factorii 2 și 5 la diferite puteri.

*Exemple.*  $\frac{1}{2}$  este echivalentă cu  $\frac{5}{10}$ .

$\frac{1}{8}$  este echivalentă cu  $\frac{125}{1\ 000}$ .

$\frac{1}{7}$  nu poate fi scrisă ca o fracție cu numitorul  $10^k$  căci nu există un număr care înmulțit cu 7 să ne dea o putere a lui 10.

$\frac{2}{25}$  este echivalentă cu  $\frac{8}{100}$ .

*Observare.* Frația  $\frac{3}{6}$  are numitorul 6; dar prin simplificare cu 3 obținem fracția echivalentă  $\frac{1}{2}$  care este echivalentă cu fracția zecimală  $\frac{5}{10}$ .

O fracție zecimală poate fi scrisă fără numitor, ca *număr zecimal*, păstrînd convențiile făcute la scrierea numerelor naturale în sistemul zecimal.

*Regulă.* Pentru a scrie un număr zecimal, (fracție zecimală scrisă fără numitor) scriem numărătorul fracției apoi despărțim de la dreapta la stînga atîtea cifre cît este exponentul lui 10 de la numitor (cîte zerouri are numitorul) completînd cu zerouri dacă este cazul.

*Exemple.*  $\frac{7}{10}$  se scrie 0,7;  $\frac{3}{100}$  se scrie 0,03;  $\frac{7}{1\ 000}$  se scrie 0,007;  $\frac{15}{10^4}$  se scrie 0,0015;  $\frac{75}{10}$  se scrie 7,5;  $\frac{125}{100} = 1,25$  ș.a.m.d.

Prima cifră după virgulă (la dreapta unităților simple) reprezintă zecimi (a zecea parte din unitate); a doua-sutimi (a suta parte din unitate); a treia — miimi, a patra — zecimi de miimi, apoi sutimi de miimi, milionimi, zecimi de milionimi ș.a.m.d.

*Citirea numerelor zecimale.* a) Citim partea întreagă apoi toată partea zecimală numind ordinul ultimei cifre.

*Exemplu.* 15,3256; 15 întregi și 3 256 zecimi de miimi.

b) Citim partea întreagă apoi partea zecimală în grupe de câte 3 cifre începînd de la virgulă.

*Exemplu.* 15 întregi, 325 miimi și 6 zecimi de miimi

c) Citim partea întreagă apoi partea zecimală cifră cu cifră.

*Exemplu.* 15 întregi, 3 zecimi, 2 sutimi, 5 miimi, 6 zecimi de miimi.

d) Citim tot numărul fără să ținem seama de virgulă și numim după ordinul ultimei cifre.

*Exemplu.* 153 256 zecimi de miimi.

### Înmulțirea (împărțirea) unui număr zecimal cu o putere a lui 10

*Regulă.* Pentru a înmulți (împărți) un număr zecimal cu o putere (cu exponent număr natural) a lui 10 mutăm virgula spre dreapta (spre stînga) după atîtea cifre, cît indică exponentul puterii lui 10.

*Exemple.* 1)  $2,7 \cdot 10 = 27$ ; 2)  $0,15 \cdot 1000 = 150$ ; 3)  $2,15 : 10 = 0,215$ ;

4)  $125,7 : 100 = 1,257$

### Transformarea fracțiilor ordinare în numere zecimale

Fracția  $\frac{a}{b}$  reprezintă cîtul numerelor naturale  $a$  și  $b$ .

*Regulă.* Pentru a transforma o fracție ordinară în număr zecimal se efectuează împărțirea  $a : b$ .

Vom întîlni următoarele cazuri:

1. Fracția  $\frac{a}{b}$  este echivalentă cu o fracție cu numitorul  $10^n$ ; în acest caz continuînd împărțirea ajungem să găsim restul 0. Acest lucru se întîmplă dacă fracția (irreductibilă) are la numitor doar factorii 2 și 5.

*Exemple.*  $\frac{2}{5} = 0,4$ ;  $\frac{1}{8} = 0,125$ .

Obținem aceleași rezultate dacă amplificăm fiecare fracție astfel încît la numitor să avem factorii 2 și 5 la același exponent.

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2}; \quad \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4.$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{125}{1\,000} = 0,125$$



2. Frația ireductibilă  $\frac{a}{b}$  nu este echivalentă cu o fracție cu numitorul o putere a lui 10 (la numitor există și alți factori în afară de 2 și 5). În acest caz împărțirea nu se termină niciodată oricâte zecimale am scoate la cât, dar există o grupă de cifre care se repetă necontenit — partea periodică. Dacă perioada începe imediat după virgulă, avem o fracție periodică simplă; dacă între virgulă și prima perioadă există o parte neperiodică, avem o fracție periodică mixtă.

În practică, perioada nu se trece decât o singură dată, în paranteză.

Exemple. 1)  $\frac{1}{3} = 0,333\dots, \frac{1}{3} = 0,(3).$

2)  $\frac{2}{3} = 0,(6).$

3)  $\frac{5}{7} = 0,(714285);$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 7} \\ \underline{50} \phantom{0} \\ 10 \phantom{0} \\ \underline{30} \phantom{0} \\ 20 \phantom{0} \\ \underline{60} \phantom{0} \\ 40 \phantom{0} \\ \underline{5} \phantom{0} \end{array}$$

La împărțirea  $5 : 7$  am obținut resturile 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5. Dacă am continua împărțirea, resturile și deci și cifrele câtului s-ar repeta. De la un moment dat, resturile se vor repeta întotdeauna căci ele nu pot fi decât mai mici decât împărțitorul.

În cazul nostru puteam obține cel mult resturile 1, 2, 3, 4, 5, 6 pe care le-am obținut într-o ordine oarecare.

4)  $\frac{5}{6} = 0,8(3);$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 6} \\ \underline{50} \phantom{0} \\ 20 \phantom{0} \\ \underline{2} \phantom{0} \end{array}$$

Am obținut resturile 5, 2, 2 deci se repetă restul 2 și cifra 3 la cât; 3 este perioada.

5)  $\frac{63}{22} = 2\frac{19}{22} = 2,8(63);$

$$\begin{array}{r} 19 \overline{) 22} \\ \underline{190} \phantom{0} \\ 140 \phantom{0} \\ \underline{80} \phantom{0} \\ 14 \phantom{0} \end{array}$$

Am obținut resturile 19, 14, 8, 14; se repetă restul 14 deci 6 este prima cifră a perioadei.

**Regula.** Pentru a transforma o fracție ireductibilă în număr zecimal cercetăm dacă numitorul are ca factori pe 2 sau 5.

a) Dacă numitorul are ca factori primi numai 2 sau 5 (sau unul din ei) atunci fracția este echivalentă cu un număr zecimal cu un număr finit de zecimale.

b) Dacă numitorul se descompune în produs de factori primi diferiți de 2 și 5, atunci fracția se transformă într-un număr zecimal periodic simplu (perioada începe imediat după virgulă).

c) Dacă numitorul are ca factori pe 2 sau 5 (sau pe amândoi) dar mai are și alți factori primi diferiți de 2 sau 5 fracția se transformă în număr zecimal periodic mixt (perioada nu începe imediat după virgulă).

### Transformarea numerelor zecimale periodice în fracții ordinare

1. *Regulă.* Un număr zecimal subunitar, periodic simplu, este echivalent cu o fracție ordinară care are la numărător perioada iar la numitor un număr format din atâtea cifre 9 câte cifre are perioada.

*Exemple.*

$$1) 0,(\overline{7}) = \frac{7}{9}.$$

În adevăr dacă notăm  $A = 0,(\overline{7})$  avem  $10A = 7,(\overline{7})$  de unde, prin scădere:

$$10A - A = 7,(\overline{7}) - 0,(\overline{7}); \quad 9A = 7; \quad A = \frac{7}{9}.$$

$$2) 0,(\overline{32}) = \frac{32}{99}.$$

În adevăr dacă  $A = 0,(\overline{32})$ ;  $100A = 32,(\overline{32})$  de unde, prin scădere:

$$100A - A = 32,(\overline{32}) - 0,(\overline{32}); \quad 99A = 32; \quad A = \frac{32}{99}.$$

$$3) 0,(\overline{312}) = \frac{312}{999}.$$

În adevăr, dacă  $A = 0,(\overline{312})$  avem  $1000A = 312,(\overline{312})$ .

Prin scădere

$$999A = 312; \quad A = \frac{312}{999}.$$

În general dacă notăm cu  $a_1a_2...a_n$  cifrele cuprinse în perioadă

$$A = 0,(\overline{a_1a_2a_3...a_n});$$

$$10^n A = a_1a_2a_3...a_n,(\overline{a_1a_2a_3...a_n}) \text{ prin scădere: } A = \frac{a_1a_2...a_n}{10^n - 1}$$

$$4) \quad 1,(\overline{3}) = 1 + 0,(\overline{3}) = 1 + \frac{3}{9} = 1\frac{1}{3}.$$

$$2,(\overline{31}) = 2 + 0,(\overline{31}) = 2\frac{31}{99}.$$

*Observare.* Regula transformării mai poate fi justificată astfel:

$$\frac{1}{9} = 0,(\overline{1}); \quad \frac{1}{99} = 0,(\overline{01}); \quad \frac{1}{999} = 0,(\overline{001}) \text{ ș.a.m.d.}$$

Dar dacă înmulțim ambele fracții cu același număr obținem tot fracții echivalente.

$$\text{De exemplu: } \frac{1}{9} = 0,(\overline{1}) \quad \text{deci } \frac{5}{9} = 0,(\overline{5})$$

$$\frac{1}{9999} = 0, (0001)$$

$$\text{deci } \frac{7}{9999} = 0, (0007)$$

$$\frac{1}{999} = 0, (001)$$

$$\text{deci } \frac{11}{999} = 0, (011);$$

$$2 \frac{13}{999} = 2, (013);$$

$$1 \frac{17}{99} = 1, (17) \text{ ș.a.m.d.}$$

2. *Regulă. Un număr zecimal subunitar periodic mixt este echivalent cu o fracție ordinară care are la numărător diferența dintre numărul de la partea zecimală (format de partea neperiodică și de perioadă) și partea neperiodică, iar la numitor numărul format de atâtea cifre 9 câte cifre are perioada urmat de atâtea zerouri câte cifre are partea neperiodică.*

*Exemple.*

$$1) 0,8(3) = \frac{83 - 8}{90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}.$$

În adevăr, considerăm numărul zecimal periodic mixt  $A = 0,8(3)$  și  $A = \frac{p}{q}$  este fracția ordinară echivalentă. Înmulțim numărul  $A$  cu 10 pentru a obține un număr zecimal periodic simplu.

$$10A = 8,(3); \quad 100A = 83, (3).$$

Scăzînd membru cu membru cele două egalități

$$100A - 10A = 83,(3) - 8,(3).$$

$$90A = 83 - 8; \quad A = \frac{83 - 8}{90}; \quad A = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}.$$

$$\frac{p}{q} = \frac{5}{6}.$$

Fracția  $\frac{p}{q}$  este echivalentă cu o fracție care are numărătorul, diferența dintre numărul format la partea zecimală pînă la a doua perioadă și partea neperiodică iar ca numitor, 90 (perioada are o cifră deci luăm o singură cifră 9 și partea neperiodică o cifră, deci 9 este urmat de un singur zero). Fracția  $\frac{p}{q}$  se numește *fracție generatoare* a numărului zecimal periodic dat.

$$2) A = 2,17(5); \quad A = 2 + 0,17(5)$$

Găsim fracția  $B$  echivalentă cu numărul zecimal periodic  $0,17(5)$ . Pentru a obține fracția  $B$  înmulțim numărul  $0,17(5)$  cu 100 (partea neperiodică are două cifre) apoi rezultatul cu 10 (perioada o cifră).

$$B = 0,17(5); \quad 100B = 17, (5); \quad 1000B = 175, (5),$$

de unde prin scădere  $900B = 175 - 17;$

$$B = \frac{175 - 17}{900}.$$

$$\text{Deci } 0,17(5) = \frac{175 - 17}{900}.$$



9 este urmat de două zerouri (cite cifre are partea neperiodică).  $0,17(5) = \frac{158}{900}$ ;

$2,17(5) = 2 \frac{79}{450}$ ;  $2 \frac{79}{450}$  este fracția generatoare.

$$3) \quad A = 3,2(31); \quad A = 3 + 0,2(31).$$

Pentru a obține un număr zecimal periodic simplu înmulțim cu 10 (partea neperiodică are o cifră), apoi rezultatul cu 100 (partea periodică are două cifre):

$$B = 0,2(31); 10B = 2,(31); 1000B = 231,(31) \text{ de unde } 1000B - 10B = 231 - 2;$$
$$990B = 231 - 2; B = \frac{231 - 2}{990}; A = 3 \frac{229}{990}.$$

$$4) \quad A = 0,231(527).$$

$$1000A = 231,(527); 1000000A = 231527,(527);$$

$$1000000A - 1000A = 231527 - 231; 999000A = 231527 - 231.$$

$$A = \frac{231527 - 231}{999000}; \quad A = \frac{231296}{999000}.$$

$$5) \quad A = 1,1(234);$$

$$A = 1 \frac{1234 - 1}{9990} = 1 \frac{1233}{9990};$$

$$A = 1 \frac{1233}{9990} = 1 \frac{137}{1110}.$$

# III

## Expresii algebrice

a) *Folosirea literelor în algebră.* Pentru generalizarea unor proprietăți stabilite pentru numere am înlocuit numerele prin litere. În aritmetică prin  $a, b, c$  înțelegem numere reale pozitive; în algebră înțelegem orice număr real (pozitiv, zero sau negativ). Expresiile de forma  $a + b + c, ab, -5a^3b, \frac{1-2x}{2a}$  sînt expresii algebrice.

### Expresii algebrice particulare.

1. *Monomul* este un produs de numere reale dintre care unele sînt reprezentate prin litere. Partea numerică se numește coeficient, iar produsul numerelor exprimate prin litere se numește parte literală.

*Exemple.* Monomul  $-5a^3b$  are coeficientul  $(-5)$  partea literală  $a^3b$ . Monomul  $a^2b^2$  are coeficientul 1 (care nu a mai fost scris) iar partea literală  $a^2b^2$ . Gradul monomului în raport cu o literă este exponentul literei respective. Gradul monomului în raport cu anumite litere care figurează ca factori ai monomului, este egal cu suma exponentilor acestor litere.

*Exemplu.* Monomul  $-5a^3b$  este de gradul 3 în raport cu  $a$ , de gradul 1 în raport cu  $b$ ; de gradul 4,  $(3+1)$  în raport cu ambele litere. Monomul  $a^5b^3c$  este de gradul 5 în raport cu  $a$ ; de gradul 3 în raport cu  $b$ ; de gradul 1 în raport cu  $c$ ; de gradul 8,  $(5+3)$  în raport cu  $a$  și  $b$ ; de gradul 9,  $(5+3+1)$  în raport cu  $a, b, c$ .

Monoame asemenea sînt monoamele care au aceeași parte literală (aceleași litere ridicate la aceleași puteri). Exemplu.  $-5a^3b$ ;  $20a^3b$ ,  $\frac{1}{5}a^3b$  sînt monoame asemenea

pentru că au aceeași litere  $(a, b)$  ridicate la aceleași puteri:  $a$  la puterea a treia  $b$  la puterea întâi. Monoamele  $-5a^3b$ ,  $4a^2b$  nu sînt asemenea căci  $a$  nu este la aceeași putere în ambele monoame;  $2a^3b^2$  și  $2a^2b^3$  nu sînt asemenea pentru că literele de același fel nu sînt ridicate la aceeași putere ( $a^3, a^2$ ) ( $b^2, b^3$ );  $2a^3b^2c$  și  $2a^3b^2$  nu sînt asemenea pentru că nu au aceeași parte literală. Al doilea monom nu-l are pe  $c$  ca factor.

*Observare.* Orice număr real poate fi considerat ca un monom care are drept coeficient acest număr iar la partea literală orice literă cu exponentul 0 ( $a^0 = 1$ ). Un număr real va fi deci un monom de gradul 0.

Orice monom adunat cu 0 este egal cu acel monom  $A + 0 = A$ .

Orice monom înmulțit cu 1 este egal cu acel monom  $A \cdot 1 = A$ .

Orice monom înmulțit cu  $(-1)$  este monomul opus (monom care are aceeași parte literală și coeficienții numere opuse).

Suma a două sau mai multe monoame este o sumă algebrică în care termenii sînt produse de numere reale.

A scădea două monoame înseamnă a scădea două numere reale; se adună la scăzut numărul opus scăzătorului.

*Exemple.* Să se facă suma și diferența monoamelor:

$$a) -5a^3b; \quad 2a^2b; \quad b) \quad 7xy^3, \quad -3x^2y^2.$$

$$a) S = -5a^3b + 2a^2b; \quad D = -5a^3b - 2a^2b \text{ (opusul monomului } 2a^2b \text{ este } -2a^2b).$$

$$b) S = 7xy^3 - 3x^2y^2; \quad D = 7xy^3 + 3x^2y^2.$$

*Polinom.* Numim polinom suma algebrică a mai multor monoame.

Un polinom cu doi termeni se numește binom; cu trei termeni trinom.

Gradul unui polinom este același cu al monomului care are gradul cel mai mare.

Polinomul  $P = 5a^3b + 7a^2b^2 - 5ab^3$  este de gradul 3 în raport cu  $a$ ; de gradul 3 în raport cu  $b$ ; de gradul 4 ( $3 + 1$ ;  $2 + 2$ ;  $1 + 3$ ) în raport cu  $a$  și  $b$ .

Polinomul  $P(x) = 5x^3 + 7x^2 - 6x^4 + 9$  este de gradul 4 (cel mai mare exponent al literei  $x$  este 4).

Dacă polinomul cuprinde mai multe litere și nu se specifică în raport cu ce literă se cere să se stabilească gradul polinomului, atunci se consideră gradul în raport cu toate literele.

Se numește *polinom omogen*, polinomul în care toți termenii au același grad.

*Exemplu.*  $P(x, y) = 5x^2y - 12xy^2 + x^3 - 5y^3$  este polinom omogen de gradul 3 căci toți termenii sînt de gradul 3.

Se numește *polinom ordonat*, polinomul în care termenii sînt ordonați după exponenții aceleiași litere — crescător dacă exponenții sînt în ordine crescătoare și descrescător dacă exponenții sînt în ordine descrescătoare.

*Exemplu.*  $P(x, y) = x^3 - 5x^2y + 7xy^2 - y^3$  este ordonat după puterile descrescătoare ale lui  $x$  și ordonat după puterile crescătoare ale lui  $y$ .

*Strîngerea termenilor asemenea.* Dacă într-un polinom există termeni asemenea ei se pot strînge într-un singur termen aplicînd proprietățile operațiilor cu numere reale: comutativitatea, asociativitatea și distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere.

$$\text{Exemplu. } P = -5a^3b + 2a^2b + 6a^3b - 2a^2b.$$

$$P = (-5a^3b + 6a^3b) + (2a^2b - 2a^2b) \text{ Am aplicat comutativitatea și asociativitatea}$$

$$P = a^3b(-5 + 6) + a^2b(2 - 2) \quad \text{căci } ma + mb = m(a + b).$$

$$P = a^3b.$$

Doi termeni asemenea opuși (cu coeficienți numere opuse) se reduc.

A strînge termenii asemenea înseamnă a înmulți factorii literali cu suma algebrică a coeficienților.

$$\text{Exemple. } -5a^3b + 2a^3b = (-5 + 2) \cdot a^3b = -3a^3b.$$

$$a^2b - a^2b + 5a^2b - 2a^2b = (1 - 1 + 5 - 2)a^2b = 3a^2b.$$

În practică înainte de a face suma algebrică a coeficienților reducem termenii asemenea opuși

$$a^2b - a^2b + 5a^2b - 2a^2b = 3a^2b.$$

*Observare.* Dacă polinomul are mai mulți termeni putem sublinia cu o linie, cu două linii ș.a.m.d. termenii asemenea pentru a ușura strîngerea lor.



Exemplu.  $P = -5a^3b + 7a^2b^2 - 5ab^3 + 2a^3b - 7ab^2 + 3ab - 7a^2b^2 + 12a^3b$ .

Stabilim termenii asemenea:  $-5a^3b$ ,  $2a^3b$ ,  $12a^3b$  și-i subliniem cu câte o linie;  $7a^2b^2 - 7a^2b^2 = 0$  (termeni opuși):  $-5ab^3$ ,  $-7ab^2$  îi subliniem cu două linii. Apoi strângem termenii asemenea

$$P = 9a^3b - 12ab^2 + 3ab.$$

Valoarea numerică a unui polinom este numărul obținut efectuând calculele după ce literele polinomului au fost înlocuite cu valori numerice date.

Exemple.

1)  $-5a^2b$  pentru  $a = -2$ ,  $b = -1$  are valoarea numerică

$$(-5) \cdot (-2)^2 \cdot (-1) = (-5) \cdot 4 \cdot (-1) = 20$$

pentru  $a = -\frac{2}{3}$ ,  $b = 3$ , monomul dat are valoarea numerică

$$-5 \left(-\frac{2}{3}\right)^2 (3) = -5 \cdot \frac{4}{9} \cdot 3 = -\frac{20}{3}$$

pentru  $a = -1$ ,  $b = \frac{1}{5}$  monomul dat are valoarea numerică

$$(-5) \cdot (-1)^2 \cdot \frac{1}{5} = -5 \cdot \frac{1}{5} = -1.$$

Valoarea numerică a unui polinom depinde de valorile date literelor care-l compun. În cazul nostru pentru fiecare pereche de numere aleasă am obținut altă valoare numerică pentru monomul dat. Un polinom are o mulțime nesfârșită de valori numerice.

2)  $P(a, b) = -5a^3b + 7a^2b^2 - 3a + 5$ .

Să se calculeze:

a)  $P(-1, 2)$ , valoarea numerică a polinomului pentru  $a = -1$ ,  $b = 2$ .

b)  $P(0, -1)$ , valoarea numerică a polinomului pentru  $a = 0$ ,  $b = -1$ .

c)  $P(-1, 0)$ , valoarea numerică a polinomului pentru  $a = -1$ ,  $b = 0$ .

a)  $P(-1, 2) = -5 \cdot (-1)^3 \cdot 2 + 7 \cdot (-1)^2 \cdot 2^2 - 3(-1) + 5$ ,

$$P(-1, 2) = (-5) \cdot (-1) \cdot 2 + 28 + 3 + 5 = 46.$$

b)  $P(0, -1) = 5$ . Toți factorii care-l conțin pe  $a$  ( $a = 0$ ) se anulează

c)  $P(-1, 0) = -3(-1) + 5 = 3 + 5 = 8$ .

Factorii care-l conțin pe  $b$  ( $b = 0$ ) s-au anulat.

**Polinoame identice.** Numim polinoame identice, polinoamele care au valori numerice egale pentru orice valori date literelor pe care le cuprind.

Exemple.

1)  $P(x) = x^2 - (x - 1)^2$  și  $Q(x) = 2x - 1$

sînt polinoame identice. Verificăm pentru câteva valori date lui  $x$ .

$$x = 1, \quad P(1) = 1, \quad Q(1) = 2 - 1 = 1.$$

$$x = 0, \quad P(0) = -1, \quad Q(0) = -1.$$

$$x = -1, \quad P(-1) = 1 - 4 = -3, \quad Q(-1) = -2 - 1 = -3.$$

$$x = \frac{1}{2}, \quad P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0, \quad Q\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 = 0 \text{ ș.a.m.d.}$$

Orice valoare am da lui  $x$  cele două polinoame vor avea valorile numerice egale.

$$2) P(a,b) = 5a^3b - 7ab^2 + 5a^3b; \quad Q(a,b) = ab(10a^2 - 7b)$$

sînt polinoame identice.

$$\begin{aligned} \text{Verificare: } a=1, \quad b=-1, \quad P(1, -1) &= -5 - 7 - 5 = -17, \\ a=-1, \quad b=1, \quad P(-1, 1) &= -5 + 7 - 5 = -3, \\ a=1, \quad b=2, \quad P(1, 2) &= 10 - 28 + 10 = -8 \\ Q(1, -1) &= -(10 + 7) = -17. \\ Q(-1, 1) &= -(10 - 7) = -3. \\ Q(1, 2) &= 2(10 - 14) = -8. \end{aligned}$$

ș.a.m.d.

**Identitate.** Numim identitate egalitatea a două polinoame identice. O identitate este deci verificată de orice valori date literelor pe care le cuprinde.

*Exemple.* 1)  $x^2 - (x - 1)^2 = 2x - 1$ .

2)  $5a^3b - 7ab^2 + 5a^3b = ab(10a^2 - 7b)$ .

3)  $3x^3 + 6x^2 + 3x = 3x(x^2 + 2x + 1)$ .

**Adunarea polinoamelor.** Adunarea a două polinoame este adunarea a două sume algebrice.

*Exemple.* 1)  $P(x) = 5x^3 - 7x^2 + 3x - 4,$   
 $Q(x) = -5x^2 + 7x^3 - 8x + 5.$

$$P(x) + Q(x) = (5x^3 - 7x^2 + 3x - 4) + (-5x^2 + 7x^3 - 8x + 5).$$

Aplicînd regulile cunoscute de la sumele algebrice desfacem parantezele

$$P(x) + Q(x) = \underline{5x^3} - \underline{7x^2} + \underline{3x} - 4 - \underline{5x^2} + \underline{7x^3} - \underline{8x} + 5$$

Efectuăm strîngerea termenilor asemenea

$$P(x) + Q(x) = 12x^3 - 12x^2 - 5x + 1.$$

2)  $P(a,b) = 5a^3b + 7a^2b^2 - 5b^4 + 7ab^3,$

$$Q(a,b) = -8a^2b^2 + 5b^4 - 7a^3b - b.$$

$$P(a,b) + Q(a,b) = (5a^3b + 7a^2b^2 - 5b^4 + 7ab^3) + (-8a^2b^2 + 5b^4 - 7a^3b - b).$$

Desfacem parantezele

$$P(a,b) + Q(a,b) = \underline{5a^3b} + \underline{7a^2b^2} - 5b^4 + 7ab^3 - \underline{8a^2b^2} + 5b^4 - \underline{7a^3b} - b.$$

Strîngem termenii asemenea

$$P(a,b) + Q(a,b) = -2a^3b - a^2b^2 + 7ab^3 - b.$$

În practică nu mai scriem polinoamele în paranteză ci adunăm succesiv la primul polinom fiecare termen al celui de al doilea.

Pentru ușurarea calculului polinoamele se scriu unele sub altele astfel încît termenii asemenea să fie scriși unul sub altul.

3)  $P(x) = -5x^3 + 7x - 6x^2 + 8;$   
 $Q(x) = 7x^3 - 5x^2 + 8x - 9;$   
 $R(x) = -15x^3 + 3x^2 - 7x + 1.$

Ordonăm polinoamele și le scriem unele sub altele:

$$\begin{array}{r} P(x) = -5x^3 - 6x^2 + 7x + 8, \\ Q(x) = 7x^3 - 5x^2 + 8x - 9, \\ R(x) = -15x^3 + 3x^2 - 7x + 1. \\ \hline P(x) + Q(x) + R(x) = -13x^3 - 8x^2 + 8x. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4) \quad P(a,b) = 3a^3b^2 - 4a^4b^3 + 5a^5b^4 + b^6, \\ Q(a,b) = 8a^3b^2 + 6a^4b^3 + 2a^5b^4 + b^6, \\ R(a,b) = -11a^3b^2 + 3a^4b^3 - 5a^5b^4 - 2b^6. \\ \hline P(a,b) + Q(a,b) + R(a,b) = 5a^4b^3 + 2a^5b^4. \end{array}$$

**Scăderea polinoamelor.** A scădea un polinom  $Q$  dintr-un polinom  $P$ , înseamnă să adunăm la  $P$  pe rând toți termenii polinomului  $Q$  luați cu semnul schimbat (diferența a două sume).

*Exemple.*

$$\begin{array}{r} 1) \quad P(a,b) = 5a^3b^2 - 7ab^2 + 8a^2b - 5a + 3b, \\ Q(a,b) = 2a^3b^2 + 7ab^2 + 8a^2b + 5a - 3b, \\ \hline P(a,b) - Q(a,b) = 5a^3b^2 - 7ab^2 + 8a^2b - 5a + 3b - \\ - 2a^3b^2 - 7ab^2 - 8a^2b - 5a + 3b. \end{array}$$

$$P(a,b) - Q(a,b) = 3a^3b^2 - 14ab^2 - 10a + 6b.$$

$$\begin{array}{r} 2) \quad P(x,y) = -7x^2y + 8xy^2 - 9y^3 + 7x^2 - 9y^2 + xy, \\ Q(x,y) = -7x^3 + 9x^2y - 8xy^2 + 3y^3, \\ \hline P(x,y) - Q(x,y) = -7x^2y + 8xy^2 - 9y^3 + 7x^2 - 9y^2 + xy + \\ + 7x^3 - 9x^2y + 8xy^2 - 3y^3 \end{array}$$

$$P(x,y) - Q(x,y) = 7x^3 - 16x^2y + 16xy^2 - 12y^3 + 7x^2 - 9y^2 + xy.$$

**Înmulțirea monoamelor.** Produsul a două monoame este tot un monom avînd coeficientul egal cu produsul coeficienților iar partea literală, produsul părților literale.

$$\text{Exemplu. } E = (-5a^2bc) \cdot (-4ab^4c^2).$$

$E = -5 \cdot a^2 \cdot b \cdot c \cdot (-4)ab^4c^2$ . Aplicăm comutativitatea și asociativitatea operației de înmulțire.

$$E = 20 (a^2 \cdot a) \cdot (b \cdot b^4) \cdot (c \cdot c^2).$$

$$E = 20 a^3b^5c^3.$$

În mod analog se efectuează produsul mai multor monoame:

$$(-3a^2bc) \cdot (2ab^2c) \cdot (-ab) = -3 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot a^2 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b^2 \cdot b \cdot c \cdot c = 6 a^4b^3c^2.$$

**Înmulțirea polinoamelor.** A înmulți un polinom  $P$  cu un polinom  $Q$  înseamnă a face produsul a două sume algebrice. Produsul va fi deci un polinom  $R = P \cdot Q$  ai cărui termeni se obțin înmulțind fiecare termen al unui polinom cu toți termenii celuilalt polinom:

$$(a + b + c) \cdot (d + e) = ad + bd + cd + ae + be + ce.$$



*Exemple.*

$$1) (3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 6x + 2) \cdot (2x^2 - x + 3) = 6x^6 + \underline{8x^5} - \underline{4x^4} + \underline{12x^3} + \underline{4x^2} - \underline{3x^5} - \underline{4x^4} + \underline{2x^3} - \underline{6x^2} - \underline{2x} + \underline{9x^4} + \underline{12x^3} - \underline{6x^2} + \underline{18x} + \underline{6} = 6x^6 + 5x^5 + x^4 + 26x^3 - 8x^2 + 16x + 6.$$

Pentru ușurarea calculelor produsele parțiale se așază unele sub altele astfel încît termenii asemenea să fie așezați în aceeași coloană.

$$2) \begin{array}{r} (5x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 4) (x^2 - 2x - 1) = \\ 5x^7 - 3x^5 + 2x^4 + 4x^2 \\ - 10x^6 + 6x^4 - 4x^3 - 8x \\ - 5x^5 + 3x^3 - 2x^2 - 4 \\ \hline 5x^7 - 10x^6 - 8x^5 + 8x^4 - x^3 + 2x^2 - 8x - 4. \end{array} \quad \text{(S-au lăsat spații pentru termenii care lipsesc)}$$

$$3) \begin{array}{r} (4a^4b^2 - 5a^3b^3 - a^2b^4 + ab) (2a^2b - 3ab^2 + b^3) = \\ 8a^6b^3 - 10a^5b^4 - 2a^4b^5 + 2a^3b^6 \\ - 12a^5b^4 + 15a^4b^5 + 3a^3b^2 - 3a^2b^7 \\ + 4a^4b^5 - 5a^3b^6 - a^2b^7 + ab^8 \\ \hline 8a^6b^3 - 22a^5b^4 + 17a^4b^5 - 4a^3b^6 + ab^8. \end{array}$$

*Observări.* 1) Dacă cele două polinoame sînt omogene de gradul  $m$  respectiv  $n$ , produsul lor va fi tot un polinom omogen; fiecare termen al polinomului produs este de gradul  $m + n$ .

2) Pentru ușurarea calculelor este bine ca înainte de a efectua înmulțirea polinoamelor să le ordonăm după puterile aceleiași litere.

$$(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \cdot (a - b) = a^5 - b^5. \quad \text{Polinoamele sînt omogene și ordonate.}$$

$$a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4$$

$$\begin{array}{r} - a^4b - a^3b^2 - a^2b^3 - ab^4 - b^5 \\ \hline a^5 \qquad \qquad \qquad - b^5 \end{array}$$

Produsele parțiale sînt omogene ordonate.

Produsul este polinom omogen și ordonat.

4. Înmulțirea polinoamelor are aceleași proprietăți ca și înmulțirea numerelor întregi căci polinomul poate fi privit ca un număr.

5.  $P \cdot 0 = 0$ . Orice polinom înmulțit cu 0 este 0.

$P \cdot 1 = P$ . 1 este element neutru pentru înmulțirea polinoamelor.

*Ridicarea unui monom la o putere. Regulă.* Pentru a ridica un monom la o putere cu exponent număr natural ridicăm fiecare factor la această putere.

$$(-5a^3b^2)^3 = (-5)^3 \cdot (a^3)^3 \cdot (b^2)^3 = -125a^9b^6.$$

În adevăr,

$$(-5a^3b^2)^3 = (-5a^3b^2) (-5a^3b^2) \cdot (-5a^3b^2).$$

Pentru a efectua înmulțirea a două sau mai multe produse suprimăm parantezele

$$(-5a^3b^2)^3 = (-5)a^3b^2(-5)a^3b^2(-5)a^3b^2.$$

Aplicând comutativitatea și asociativitatea

$$\begin{aligned} (-5a^3b^2)^3 &= (-5)^3(a^3)^3 \cdot (b^2)^3, \\ (-5a^3b^2)^3 &= -125a^9b^6. \end{aligned}$$

Exemple.

- 1)  $(3abx^2)^4 = 3^4a^4b^4x^8 = 81a^4b^4x^8.$
- 2)  $(-a^2b^3x)^3 = -a^6b^9x^3.$

## Identități

Aplicând regulile de calcul stabilite se obțin unele identități des folosite.

1) *Produsul de sumă prin diferență a două monoame sau polinoame este egal cu diferența pătratelor lor.*

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2} \quad \text{căci } (a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Aplicații.

$$\begin{aligned} (3a^2b^3 - 4a^3b^2)(3a^2b^3 + 4a^3b^2) &= 9a^4b^6 - 16a^6b^4. \\ [(m+n) - p][(m+n) + p] &= (m+n)^2 - p^2 = m^2 + 2mn + n^2 - p^2. \\ \left(\frac{1}{2}x^4y^2 + \frac{2}{5}xy\right)\left(\frac{1}{2}x^4y^2 - \frac{2}{5}xy\right) &= \frac{1}{4}x^8y^4 - \frac{4}{25}x^2y^2. \end{aligned}$$

2) *Pătratul unui binom este egal cu pătratul primului termen, plus de două ori primul termen înmulțit cu al doilea, plus pătratul celui de-al doilea termen.*

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

În adevăr,

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Aplicații.

$$\begin{aligned} 1) (a-b)^2 &= [a+(-b)]^2 = a^2 - 2ab + b^2. \\ 2) (3a^2b + 5ab^2)^2 &= (3a^2b)^2 + 2 \cdot 3a^2b \cdot 5ab^2 + (5ab^2)^2 = 9a^4b^2 + 30a^3b^3 + 25a^2b^4. \end{aligned}$$

$$3) \left(\frac{2}{5}x^3 - \frac{5}{4}y^2\right)^2 = \frac{4}{25}x^6 - x^3y^2 + \frac{25}{16}y^4.$$

$$3) \text{ Produsul a două binoame care diferă numai prin al doilea termen } (a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc.$$

Aplicație.

$$(2a-3b)(2a+5b) = (2a)^2 + 2a(-3b+5b) - 15b^2 = 4a^2 + 4ab - 15b^2.$$

4) Pătratul unui polinom este egal cu suma pătratelor termenilor săi, la care se adaugă de două ori suma produselor termenilor luați câte doi.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

În adevăr,

$$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + c^2 + 2(a + b)c = a^2 + b^2 + 2ab + c^2 + 2ac + 2bc$$

Aplicații.

$$\begin{aligned} 1) \quad & (2x - y + 3z)^2 = 4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy + 12xz - 6yz \\ 2) \quad & (a^2 - a + 1)^2 = a^4 + a^2 + 1 - 2a^3 + 2a^2 - 2a \end{aligned}$$

5) Cubul unui binom este egal cu primul termen la cub, plus de trei ori pătratul primului termen înmulțit cu al doilea termen, plus de trei ori primul termen înmulțit cu al doilea termen la pătrat plus al doilea termen la cub

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\text{În adevăr } (a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + b^2 + 2ab)(a + b) = a^3 + ab^2 + 2a^2b + a^2b + b^3 + 2ab^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Aplicații.

$$\begin{aligned} 1) \quad & (a - b)^3 = [a + (-b)]^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \\ 2) \quad & (2a + 3b)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2 \cdot 3b + 3(2a)(3b)^2 + (3b)^3 = 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3. \\ 3) \quad & (a^3 - 2b^2)^3 = a^9 + 3a^6(-2b^2) + 3a^3(-2b^2)^2 + (-2b^2)^3 = \\ & = a^9 - 6a^6b^2 + 12a^3b^4 - 8b^6. \end{aligned}$$

6) Din efectuarea înmulțirii  $(a^2 + ab + b^2)$  cu  $(a - b)$  obținem

$$(a^2 + ab + b^2)(a - b) = a^3 - b^3.$$

$$\text{Aplicație. } (4x^2 + 2x + 1)(2x - 1) = (2x)^3 - 1^3 = 8x^3 - 1.$$

7) De asemenea prin efectuarea produsului  $(a^2 - ab + b^2)$  cu  $(a + b)$  obținem

$$(a^2 - ab + b^2)(a + b) = a^3 + b^3$$

$$\begin{aligned} \text{Aplicații. } 1) \quad & (a^2 + 5a + 25)(a - 5) = a^3 - 125. \\ 2) \quad & (x^4 - x^2y^2 + y^4)(x^2 + y^2) = x^6 + y^6. \end{aligned}$$

Împărțirea monoamelor.

Regulă. Cîtuș a două monoame se obține împărțind coeficienții între ei și părțile literale între ele.



În adevăr, a împărți un produs cu un alt produs înseamnă a împărți succesiv primul produs cu toți factorii produsului al doilea.

*Exemplu.*  $A = (24a^4b^5c^3) : (4a^2bc^2) = 6a^2b^4c.$

Dar pentru a împărți un produs cu un număr este suficient să împărțim un factor cu acest număr; în cazul nostru

$$A = (24 : 4) \cdot (a^4 : a^2) \cdot (b^5 : b) \cdot (c^3 : c^2). \text{ Efectuăm parantezele.}$$

$$A = 6 \cdot a^2 \cdot b^4 \cdot c.$$

$$2) (100x^3y^2z) : (-25x^2y) = [100 : (-25)] \cdot (x^3 : x^2) \cdot (y^2 : y) \cdot z = -4xyz,$$

$$3) (-27x^5y^3z^4) : (4x^5z^3) = -\frac{27}{4}x^0y^3z = -\frac{27}{4}y^3z.$$

*Observări.* 1) În exemplele de împărțire a două monoame pe care le-am luat, gradul fiecărei litere a fost mai mare la deîmpărțit decât la împărțitor [ $a^m : a^n = a^{m-n}$ ;  $m \geq n$ ] și cîțul a fost un monom întreg. Dacă  $m < n$ ,  $a^m : a^n$  se scrie  $\frac{a^m}{a^n}$ .

2) Cîțul a două monoame poate fi scris ca și la numere sub formă de fracție algebrică:

$$\frac{3a^2b}{5x}, \frac{7x^2y}{2a}, \frac{35bx^3y^3}{70a^2xy^3};$$

3) La operațiile de împărțire a monoamelor este necesar să se închidă împărțitorul în paranteze, altfel se efectuează alte operații.

De exemplu:  $(15 \cdot 18) : (5 \cdot 3) = 15 \cdot 18 : 5 : 3 = 18.$

$$(15 \cdot 18) : 5 \cdot 3 = 15 : 5 \cdot 18 \cdot 3 =$$

$$= 3 \cdot 18 \cdot 3 = 162.$$

$$a^3b^2 : (a^2b) = a \cdot b, \quad a^3b^2 : a^2b = ab^3.$$

### c. Împărțirea unui polinom cu un monom

Pentru a împărți un polinom cu un monom, împărțim fiecare termen al polinomului cu monomul dat.

*Exemple:*

$$1) (20a^4b + 15a^3b^2 - 10a^2b^3 + 15ab^4) : (5ab) = \frac{20a^4b}{5ab} + \frac{15a^3b^2}{5ab} - \frac{10a^2b^3}{5ab} + \frac{15ab^4}{5ab} = 4a^3 + 3a^2b - 2ab^2 + 3b^3.$$

$$2) (21x^4 + 40x^3 - 20x^2 + 6x - 12) : (-6x) = -\frac{7}{2}x^3 - \frac{20}{3}x^2 + \frac{10}{3}x - 1 + \frac{2}{x}.$$

## IV.

### Divizibilitatea numerelor și polinoamelor

Fiind date două numere întregi sau două polinoame,  $A$  și  $B$ , în cazul când împărțirea  $A : B$  se face exact vom spune că  $B$  divide pe  $A$  sau că  $A$  este divizibil cu  $B$  (scriem  $A : B$ ). Mai spunem că  $A$  este multiplu al lui  $B$  sau că  $B$  este un divizor al lui  $A$ .

Când  $A$  nu se divide cu  $B$  vom scrie  $A \not\vdots B$ .

Divizibilitatea numerelor întregi se reduce la divizibilitatea numerelor naturale.

În cele ce urmează vom prezenta câteva criterii de divizibilitate a numerelor naturale.

La baza acestor criterii stau următoarele propoziții: 1. Dacă mai multe numere naturale  $a, b, c$  sînt divizibile cu un număr  $p$ , atunci și suma (diferența) lor este divizibilă cu același număr.

Dacă  $a : p, b : p, c : p$ , înseamnă că  $a, b, c$  sînt multiplii de  $p$

$$a = pa_1, b = pb_1, c = pc_1.$$

$$a + b + c = pa_1 + pb_1 + pc_1 = p(a_1 + b_1 + c_1); a + b + c \text{ este multiplu de } p.$$

Deci  $(a + b + c) : p$ .

Exemple.  $75 : 5; \quad 15 : 5; \quad 125 : 5.$

$$(75 + 15 + 125) : 5.$$

În adevăr,

$$5(15 + 3 + 25) : 5 = 15 + 3 + 25 = 43.$$

deci

$$(75 + 15 + 125) : 5.$$

2. Dacă într-o sumă de doi termeni un termen al sumei și suma sînt divizibile cu același număr, atunci și al doilea termen al sumei este divizibil cu acel număr.

Dacă  $(a + b) : p$  și  $a : p$  atunci  $b : p$ .

Dacă  $(a + b) : p$  și  $a : p$ , atunci și diferența lor este divizibilă cu  $p$  deci

$$(a + b - a) : p \text{ sau } b : p.$$

Din proprietățile 1 și 2 rezultă:

O sumă de doi termeni în care un termen este divizibil cu un număr este divizibilă cu acel număr dacă și numai dacă și celălalt termen al sumei este divizibil cu acel număr.

3. Dacă un număr este divizibil cu alt număr, el este divizibil și cu divizorii acelui număr.

$$546 : 6, \quad 546 : 2, \quad 546 : 3.$$

4. Dacă  $a : b$  și  $b : c$  (dacă  $a$  este divizibil cu un număr  $b$  și acesta este divizibil cu alt număr  $c$ , atunci  $a : c$ ).

Spunem că divizibilitatea este tranzitivă.

În adevăr,  $a : b$  înseamnă că  $a = bq$ ;  $b : c$  înseamnă că  $b = cr$ .

Deci  $a = bq = crq$ .

$a = crq$  înseamnă că  $a : c$ .

Exemplu.  $442 : 26$  ( $442 : 26 = 17$ )

și  $26 : 13$ .

Atunci  $442 : 13$ . Verificare:  $442 : 13 = 34$ .

## Criteriul de divizibilitate cu 10

Un număr este divizibil cu 10 dacă și numai dacă ultima lui cifră (care reprezintă unități simple) este 0.

În adevăr orice număr care se termină în 0 se împarte exact la 10.

## Criteriul de divizibilitate cu 2

Un număr este divizibil cu 2 dacă și numai dacă ultima cifră este 0 sau reprezintă un număr par.

Dacă numărul se termină în 0 este divizibil cu 10 deci și cu 2 (divizor al lui 10).

Dacă numărul nu se termină în 0 poate fi scris ca o sumă în care primul termen este numărul de zeci al numărului, iar al doilea numărul unităților,  $N = A \cdot 10 + a_0$  ( $a_0$  cifra unităților).

$A \cdot 10 : 2$ , deci  $N : 2$  dacă și numai dacă  $a_0 : 2$ .

Exemple. 1)  $2536 = 2530 + 6$   $2536 : 2$ .

$: 2$   $: 2$   $: 2$   $: 2$ .

2)  $2537 = 2530 + 7$   $2537 \not: 2$ .

$\not: 2$   $: 2$   $\not: 2$

## Criteriul de divizibilitate cu 5

Un număr este divizibil cu 5 dacă și numai dacă ultima cifră este 0 sau 5.

Raționament analog ca în cazul precedent

$N : 10 \Rightarrow N : 5$  (căci  $10 : 5$ )

$N = A \cdot 10 + a_0$   $10A : 5 \Rightarrow N : 5$  dacă și numai dacă  $a_0 : 5$ .

Exemple. 1)  $1725 = 1720 + 5$   $1725 : 5$

$: 5$   $: 5$   $: 5$

2)  $1727 = 1720 + 7$   $1727 \not: 5$ .

$\not: 5$   $: 5$   $\not: 5$

## Criteriul de divizibilitate cu $10^n$

Un număr este divizibil cu  $10^n$  dacă și numai dacă este terminat în  $n$  zerouri.

În adevăr, în acest caz numărul se împarte exact cu 10.

Cazuri particulare. 1)  $n = 2$ . Un număr este divizibil cu 100 dacă și numai dacă se termină cu 2 zerouri. În acest caz numărul este divizibil și cu divizorii lui 100 : cu 4 și 25.



2)  $n = 3$ . Un număr este divizibil cu 1000 dacă și numai dacă se termină cu 3 zerouri. În acest caz numărul se divide și cu divizorii lui 1000; în particular cu 8 și 125.

### Criteriul de divizibilitate cu 4 (sau 25)

Un număr este divizibil cu 4 (cu 25) dacă și numai dacă ultimele două cifre sînt zerouri sau reprezintă un număr divizibil cu 4 (cu 25).

$N = A \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$  ( $a_0$  și  $a_1$  sînt cifrele unităților respectiv zecilor numărului).

$A \cdot 10^2 : 4$ . Atunci  $N : 4$  dacă și numai dacă  $(a_1 \cdot 10 + a_0) : 4$ .

$A \cdot 10^2 : 25$ . Atunci  $N : 25$  dacă și numai dacă  $(a_1 \cdot 10 + a_0) : 25$ .

Exemple. 1)  $4332 = 4300 + 32$

$$\begin{array}{r} : 4 \quad : 4 \quad : 4 \quad 4332 : 4, \\ \not\div 25 \quad : 25 \quad \not\div 25 \quad 4332 \not\div 25. \end{array}$$

2)  $4250 = 4200 + 50$

$$\begin{array}{r} \not\div 4 \quad : 4 \quad \not\div 4 \quad 4250 \not\div 4, \\ : 25 \quad : 25 \quad : 25 \quad 4250 : 25. \end{array}$$

### Criteriul de divizibilitate cu 8 (sau 125)

Un număr este divizibil cu 8 (sau 125) dacă și numai dacă ultimele trei cifre ale numărului sînt zerouri sau reprezintă un număr divizibil cu 8 (sau 125).

$N = A \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$  și se aplică proprietatea divizibilității unei sume.

Exemple. 1)  $25125 = 25000 + 125$

$$\begin{array}{r} : 125 \quad : 125 \quad : 125 \quad 25125 : 125. \\ \not\div 8 \quad : 8 \quad \not\div 8 \quad 25125 \not\div 8. \end{array}$$

2)  $25246 = 25000 + 246$

$$\begin{array}{r} \not\div 8 \quad : 8 \quad \not\div 8 \quad 25246 \not\div 8. \end{array}$$

### Criteriul de divizibilitate cu 3 (sau 9)

Pentru stabilirea criteriului de divizibilitate cu 3 sau 9 ținem seama că  $10^n = k' \cdot 9 + 1$ ; iar  $a \cdot 10^n = k \cdot 9 + a$ .

În adevăr

$$10 = 9 + 1$$

$$10^2 = 99 + 1 = a \cdot 9 + 1$$

$$10^3 = 999 + 1 = b \cdot 9 + 1$$

$$\vdots$$

$$10^n = \underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ cifre}} + 1 = k \cdot 9 + 1.$$

Un număr este divizibil cu 3 (sau 9) dacă și numai dacă suma numerelor reprezentate de cifrele lui este un număr divizibil cu 3 (sau 9).

$$4521 = 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 = 4(A \cdot 9 + 1) + 5(B \cdot 9 + 1) + 2(C \cdot 9 + 1) + 1.$$

Desfacem parantezele și aplicăm proprietățile adunării stringind toți multiplii de 9 într-o sumă care va fi evident multiplu de 9.

$$4\,521 = M \cdot 9 + (4 + 5 + 2 + 1) \quad \text{Aplicăm proprietatea divizibilității unei}$$

$$\begin{array}{r} \vdots 3 \\ \vdots 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} \vdots 3 \\ \vdots 9 \end{array} \quad \text{sume de două numere.}$$

$$\text{Deci } 4\,521 : 3 \quad \text{și} \quad 4\,521 : 9.$$

*Aplicație.* Ce cifre trebuie să punem în locul unităților simple (notate cu  $u$ ) în numărul  $N = (712u)$  pentru ca numărul să fie divizibil cu : 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 25.

Pentru a fi divizibil cu 2,  $u$  poate fi una din cifrele: 0, 2, 4, 6, 8.

Pentru a fi divizibil cu 3 suma  $7 + 1 + 2 + u = 10 + u$  trebuie să fie divizibilă cu 3; deci  $u$  poate fi 2,  $(12 : 3)$ ; 5,  $(15 : 3)$  sau 8,  $(18 : 3)$ .

Pentru a fi divizibil cu 4, numărul  $(2u)$  trebuie să fie divizibil cu 4 deci  $u$  poate fi 4,  $(24 : 4)$  sau 8,  $(28 : 4)$  sau:

$N : 6$  dacă  $N : 3$  și  $N : 2$  ( $N$  număr par și  $N : 3$ ) deci  $u$  poate fi 2 sau 8.

$$7\,122 : 6 \quad \text{și} \quad 7\,128 : 6.$$

$N : 9$  dacă  $(10 + u) : 9$  deci  $u = 8$ .  $N : 25$  dacă  $12u : 25$  deci  $u = 5$ .

*Numere prime.* Orice număr natural se divide cu 1 și cu el însuși. Acești divizori se numesc *divizori improprii*. Ceilalți divizori ai numărului (dacă există) se numesc *divizori proprii*.

*Număr prim* se numește numărul care are numai divizori improprii (pe 1 și pe el însuși).

*Exemple.* 2, 3, 5, 7, 11 ș.a.m.d. Numărul 6 nu e număr prim căci în afară de divizorii improprii 1 și 6 mai are divizorii proprii 2 și 3.

*Număr compus sau neprim* este numărul care are și divizori proprii.

*Exemple.* 6, 8, 9, 12, 14, 25 ș.a.m.d.

*Regulă.* Pentru a stabili dacă un număr este prim sau neprim cercetăm dacă se divide cu toate numerele prime (începând cu 2) luate în ordine, până ajungem la o împărțire în care cîțul este mai mic decît împărțitorul. Dacă împărțirile au fost toate împărțiri cu rest, numărul este număr prim.

Pentru numerele prime mai mici ca 100 putem folosi un tabel în care scriem toate numerele naturale începînd cu 2 pînă la 100. Tăiem apoi din tabel numerele din 2 în 2 începînd cu 4 (toți multiplii de 2), din 3 în trei începînd cu 9 (toți multiplii de 3), apoi multiplii de 5 de 7. În tabel rămîn netaiate următoarele numere care sînt numere prime.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

*Exemplu.* Numărul 401 este număr prim.

$$401 \not\div 2; \quad 401 \not\div 3; \quad 401 \not\div 5; \quad \frac{401}{2} \Big| \frac{7}{57};$$

$$\frac{401}{71} \Big| \frac{11}{36}; \quad \frac{401}{11} \Big| \frac{13}{30}; \quad \frac{401}{61} \Big| \frac{17}{23}; \quad \frac{401}{21} \Big| \frac{19}{20}.$$

Ar trebui să încercăm mai departe cu 23, dar nu mai continuăm încercările deoarece cîțul împărțirii cu 19 este 20, cîțul împărțirii cu 23 ar fi mai mic decît 20.

Dacă un număr natural (diferit de 1) nu este număr prim, el admite cel puțin un divizor propriu, număr prim.

Orice număr compus poate fi scris în mod unic sub forma unui produs de numere prime.

În acest caz spunem că am descompus numărul în factori primi. Pentru a descompune un număr în factori primi procedăm astfel:

Împărțim numărul la cel mai mic divizor propriu; cîțul obținut, la cel mai mic divizor propriu al lui ș.a.m.d.

Exemple. 1)  $N = 1735$ .

$1735 \not\div 2$ ;  $1735 \not\div 3$ .  $1735 : 5$  deci 5 este cel mai mic divizor propriu  $N = 347 \cdot 5$ .

$347 \not\div 5$ ;  $347 \not\div 7$ ;  $347 \not\div 11$ ;  $347 \not\div 13$ ;  $347 \not\div 17$ ;  $347 \not\div 19$ ;  $\frac{347}{157} \bigg| \frac{19}{18}$   
 $\frac{157}{5}$

Deci 347 este număr prim;  $N = 5 \cdot 347$ .

2)  $N = 5655$ .

$5655 \not\div 2$ ;  $5655 : 3$ ;  $N = 3 \cdot 1885$ ;  $1885 : 5$ ;  $1885 = 5 \cdot 377$ .

$N = 3 \cdot 5 \cdot 377$ ;  $377 \not\div 7$ ;  $377 \not\div 11$ ;  $377 : 13$ ;  $377 = 13 \cdot 29$ .

$$N = 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29.$$

Pentru ușurarea scrisului, în cazul numerelor mari, se scriu toți divizorii primi ai numărului la dreapta unei linii verticale iar la stînga cîturile împărțirii prin acești factori.

Exemple. 1)  $N = 17325$ .

$$\begin{array}{r|l} 17325 & 3 \\ 5775 & 3 \\ 1925 & 5 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$N = 17325 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

2)  $N = 2259000$ .

Dar  $N = 2259 \cdot 1000 = 2259 \cdot 2^3 \cdot 5^3$ . Descompunem 2259

$$\begin{array}{r|l} 2259 & 3 \\ 753 & 3 \\ 251 & 251; \end{array} \quad \frac{251}{41} \bigg| \frac{7}{35}; \quad \frac{251}{31} \bigg| \frac{11}{22}; \quad \frac{251}{121} \bigg| \frac{13}{19}$$

$$\frac{251}{81} \bigg| \frac{17}{14}; \quad \frac{251}{61} \bigg| \frac{19}{13} \quad 251 \text{ este număr prim.}$$

$$N = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 251.$$



3)

$$N = 72560000.$$

$$\begin{array}{r}
 72560000 \left| \begin{array}{l} 2^4 \cdot 5^4 \\ 7256 \quad 2^3 \\ 1814 \quad 2 \\ 907 \quad 907 \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{907}{20} \left| \frac{7}{129} \right. \\ \frac{67}{4} \end{array} ; \quad \begin{array}{l} \frac{907}{27} \left| \frac{11}{82} \right. \\ \frac{5}{5} \end{array} ; \quad \begin{array}{l} \frac{907}{127} \left| \frac{13}{69} \right. \\ \frac{10}{10} \end{array} ; \\
 \\
 \begin{array}{l} \frac{907}{57} \left| \frac{17}{53} \right. \\ \frac{6}{6} \end{array} ; \quad \begin{array}{l} \frac{907}{147} \left| \frac{19}{47} \right. \\ \frac{14}{14} \end{array} ; \quad \begin{array}{l} \frac{907}{217} \left| \frac{23}{39} \right. \\ \frac{10}{10} \end{array} ; \\
 \\
 \begin{array}{l} \frac{907}{37} \left| \frac{29}{31} \right. \\ \frac{8}{8} \end{array} , \quad 907 \nmid 31, \\
 907 \text{ este număr prim.}
 \end{array}$$

$$N = 2^7 \cdot 5^4 \cdot 907$$

$A$  este divizibil cu  $B$  dacă toți factorii primi ai împărțitorului se găsesc printre factorii deîmpărțitului cu exponenți cel puțin egali.

Exemple. 1)  $A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ ,  $B = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ .

$A \nmid B$  pentru că toți factorii lui  $B$  se găsesc printre factorii lui  $A$  la puteri cel puțin egale, 2 și 3 la puteri mai mari, 7 la aceeași putere.

2)  $A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ ,  $B = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$ .

$A \nmid B$  pentru că 3 se găsește la deîmpărțit la o putere mai mică.

3)  $A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ ,  $B = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ .

$A \nmid B$  pentru că factorul 11 nu este factor al numărului  $A$ .

Înmulțirea și împărțirea numerelor descompuse în factori primi se fac pe baza regulilor acestor operații cu produse și puteri de numere.

Exemplu.  $A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ ,  $B = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ .

$A : B = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) : (2^2 \cdot 3 \cdot 7)$ . Împărțim primul produs cu fiecare factor al celui de-al doilea.

$$A : B = (2^3 : 2^2) \cdot (3^2 : 3) \cdot 5(7 : 7); A : B = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

$A \cdot B = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (2^2 \cdot 3 \cdot 7)$ . Dăsfacem parantezele, aplicăm comutativitatea și asociativitatea

$$A \cdot B = 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7; A \cdot B = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2.$$

Divizorii unui număr se pot stabili cercetînd care sînt numerele mai mici decît numărul dat care divid acest număr.

De exemplu: 12 are divizorii 1,2,3,4,6,12;

15 are divizorii 1,3,5,15;

$2^3 \cdot 3$  are divizorii 1,2,2<sup>2</sup>,2<sup>3</sup>,3,6,12,24.

*Divizor comun* a două sau mai multe numere este numărul care divide toate numerele date. Dacă  $A$  este mulțimea divizorilor numărului  $N$  și  $B$  mulțimea divizorilor numărului  $M$  atunci mulțimea  $C$  a divizorilor comuni este  $A \cap B$ .

*Exemple.*

$$1) 24 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24,$$

$$40 : 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.$$

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \cap \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\} = \{1, 2, 4, 8\}.$$

Divizorii comuni ai numerelor 24 și 40 sînt: 1, 2, 4, 8.

$$2) 18 : 1, 2, 3, 6, 9, 18,$$

$$27 : 1, 3, 9, 27.$$

$$\{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \cap \{1, 3, 9, 27\} = \{1, 3, 9\}.$$

Divizori comuni sînt: 1, 3, 9.

$$3) 18 : 1, 2, 3, 6, 9, 18,$$

$$35 : 1, 5, 7, 35.$$

$$\{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \cap \{1, 5, 7, 35\} = \{1\}.$$

18 și 35 au ca divizor comun numai pe 1. Numerele care admit ca divizor comun numai pe 1 se numesc numere prime între ele.

Dacă două numere nu sînt prime între ele atunci admit doi sau mai mulți divizori comuni, cel mai mare dintre acești divizori se numește cel mai mare divizor comun.

*Regulă. Cel mai mare divizor comun a două numere se află astfel:*

*se descompun numerele în factori primi și se face produsul factorilor primi comuni luați cu exponenții cei mai mici.*

Dacă unul din numere este divizorul celuilalt, acesta este cel mai mare divizor comun.

*Exemple. 1)*

$$48 = 2^4 \cdot 3$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

---


$$\text{c.m.m.d.c.} = 2^2 \cdot 3$$

2)

$$125 = 5^3$$

$$75 = 3 \cdot 5^2$$

---


$$\text{c.m.m.d.c.} = 5^2.$$

3)

$$125 = 5^3$$

$$81 = 3^4$$

---


$$\text{c.m.m.d.c.} = 1.$$

Numerele sînt prime între ele.

4)

$$81 = 3^4$$

$$27 = 3^3. \text{ C.m.m.d.c. este } 27 \text{ căci } 81 : 27.$$

Cel mai mare divizor comun al mai multor numere este produsul factorilor primi comuni cu exponenții cei mai mici.

Dacă numerele sînt prime între ele c.m.m.d.c. = 1.

Exemple. 1)  $125 = 5^3$   
 $500 = 2^2 \cdot 5^3$   
 $1275 = 3 \cdot 5^2 \cdot 17$

---

c.m.m.d.c. =  $5^2$ .

2)  $162 = 2 \cdot 3^4$   
 $54 = 2 \cdot 3^3$   
 $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$   
 $1275 = 3 \cdot 5^2 \cdot 17$

---

c.m.m.d.c. = 3.

## Multipli comuni

Multiplii unui număr se află înmulțind acel număr cu orice număr întreg.

De exemplu, multiplii lui 7 sînt: 14; 21; 28; 35; 42; 56; 63; 70; 77....

Numărul multiplilor unui număr este nesfîrșit. Două sau mai multe numere au totdeauna multipli comuni (Numere care se divid cu numerele date.)

Exemple.

Multiplii lui 125: 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875...

Multiplii lui 75: 75, 150, 225, 300, 375, 450, 525, 600, 675, 750,...

Numerele 375, 750 sînt multipli comuni ai celor două numere.

Numerele 125 și 75 mai au și alți multipli comuni ca de exemplu  $1125 = 3 \cdot 375$ ,  $1500 = 4 \cdot 375$  ș.a.m.d.

Cel mai mic dintre multipli comuni se numește cel mai mic multiplu comun. În cazul nostru c.m.m.m.c. este 375.

**Regulă.** Cel mai mic multiplu comun a două numere se află astfel: descompunem numerele în factori primi și facem produsul factorilor comuni și necomuni luați o singură dată la exponenții cei mai mari.

Dacă un număr se divide cu celălalt, el este c.m.m.m.c.

Exemple. 1) 1 250 și 125.

$1\ 250 : 125$       c.m.m.m.c. = 1 250

2)  $1\ 250 = 2 \cdot 5^4$   
 $3\ 275 = 5^2 \cdot 131$   
 $75 = 3 \cdot 5^2$

3 275	5
655	5
131	131

---

c.m.m.m.c. =  $2 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 131$ .

**Observări.** 1) Din felul cum se calculează c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. rezultă că produsul a două numere este egal cu produsul dintre c.m.m.m.c. și c.m.m.d.c. al lor.



Exemplu.

$$\begin{array}{l}
 A = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \\
 B = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \\
 \hline
 \text{c.m.m.m.c} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \\
 \text{c.m.m.d.c} = 2^2 \cdot 3 \\
 \hline
 A \cdot B = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \quad \text{și} \\
 (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (2^2 \cdot 3) = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7.
 \end{array}$$

2) Cel mai mare divizor comun a două numere se poate stabili pe baza algoritmului (regula) lui Euclid care se bazează pe următoarea proprietate.

Dacă două numere se divid cu un număr, atunci și restul împărțirii celor două numere se divide cu acel număr.

Dacă  $a = b \cdot q + r$ ;  $a : d$  și  $b : d$  atunci,  $r : d$ .

Proprietatea se deduce imediat din proprietatea divizibilității unei sume. Suma (a) și un termen al ei (bq) sînt divizibile cu numărul  $d$  deci și celălalt termen al sumei (r) este divizibil cu numărul  $d$ .

Practic pentru a afla c.m.m.d.c. a două numere, de exemplu 2 725 și 325, efectuăm împărțirea  $\frac{2725}{125} \Big| \frac{325}{8}$ .  
c.m.m.d.c. al celor două numere va fi c.m.m.d.c. al numerelor 325 și 125.

$$\text{Efectuăm împărțirea } \frac{325}{75} \Big| \frac{125}{2}.$$

C.m.m.d.c. al numerelor 2 725 și 325 este c.m.m.d.c. al numerelor 125 și 75.

$$\text{Efectuăm împărțirea } \frac{125}{50} \Big| \frac{75}{1}.$$

C.m.m.d.c. va fi c.m.m.d.c. al numerelor 75 și 50.

$$\text{Efectuăm împărțirea } \frac{75}{25} \Big| \frac{50}{1}.$$

C.m.m.d.c. va fi c.m.m.d.c. al numerelor 50 și 25.

C.m.m.d.c. al numerelor 50 și 25 este 25.  $50 : 25$ .

Deci c.m.m.d.c. al numerelor 2725 și 325 este 25.

Dacă numerele sînt prime între ele vom găsi un rest egal cu 1 care va deveni ultimul împărțitor deci c.m.m.d.c. = 1.

#### Aplicații

1) Un număr este divizibil cu 8 dacă și numai dacă cifra unităților adunată cu dublul cifrei zecilor și cu de patru ori cifra sutelor dă o sumă divizibilă cu 8.

Numărul  $N$  cu oricîte cifre, se poate scrie sub forma

$N = A10^3 + a_210^2 + a_110 + a_0$  unde  $a_2, a_1, a_0$  sînt respectiv cifrele sutelor, zecilor, unităților și  $A$  un număr natural oarecare.

Căutăm să descompunem numărul într-o sumă de doi termeni din care unul din termeni să fie suma dată în problemă:

$$(a_0 + 2a_1 + 4a_2).$$

$$N = A \cdot 10^3 + 96a_2 + 4a_2 + 8a_1 + 2a_1 + a_0.$$

Dăm pe 8 factor comun parțial:

$$N = 8 (125A + 12a_2 + a_1) + (4a_2 + 2a_1 + a_0).$$

Primul termen al sumei este divizibil cu 8; numărul  $N$  este divizibil cu 8 dacă și numai dacă și al doilea termen al sumei este divizibil cu 8 deci:

$$(4a_2 + 2a_1 + a_0) : 8$$

2) Dacă într-un număr de șase cifre  $N = a_5 10^5 + a_4 10^4 + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$  avem relațiile: cifra unităților ( $a_0$ ) este egală cu cifra miilor ( $a_3$ ); cifra zecilor ( $a_1$ ) egală cu cifra zecilor de mii ( $a_4$ ); cifra sutelor ( $a_2$ ) egală cu cifra sutelor de mii ( $a_5$ ), atunci numărul este divizibil cu 7, 11, 13, 1001.

În condițiile date numărul  $N$  se scrie:

$$N = a_2 10^5 + a_1 10^4 + a_0 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0.$$

Dând factori comuni între termenii care conțin ca factor pe  $a_0, a_1, a_2$   $N = 10^2 a_2 (10^3 + 1) + 10 a_1 (10^3 + 1) + a_0 (10^3 + 1)$  deci

$$N = (10^3 + 1) (10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0).$$

$10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0$  este un număr natural  $n$  deci

$$N : (10^3 + 1), \quad N : 1001.$$

$N$  fiind divizibil cu 1001 este divizibil și cu divizorii lui: 7, 11, 13.

## Descompunerea polinoamelor în factori

### Metoda factorului comun

Această metodă se aplică atunci când fiecare termen al polinomului conține ca factor o expresie oarecare. Acest factor este cel mai mare divizor comun al termenilor polinomului, el poate fi un număr, un monom sau un polinom.

$$1) 3x + 3y = 3(x + y); ab + ac = a(b + c); 3xy - 3yz = 3y(x - z).$$

$$2) 20a^4 b^5 c - 35a^3 b^6 c^2 + 40a^2 b^7 c^2 + 5a^2 b^5 c = 5a^2 b^5 c (4a^2 - 7abc + 8b^2 c + 1).$$

$$3) a(x - y) - b(x - y) = (x - y)(a - b).$$

$$4) a^2(x - 1) - b(1 - x) = a^2(x - 1) + b(x - 1) = (x - 1)(a^2 + b).$$

Pentru a scoate în evidență factorul  $(x - 1)$  în al doilea termen al sumei am schimbat semnul din fața parantezei.

$$5) x(a - b) + y(b - a) + z(a - b) = x(a - b) - y(a - b) + z(a - b) = (a - b)(x - y + z).$$

$$6) 2a(x + y - z) - 3b(x + y - z) - 5c(x + y - z) = (x + y - z)(2a - 3b - 5c).$$

### Descompunerea în factori pe baza identităților cunoscute.

a) Identitatea  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  ne conduce la descompunerea unei diferențe de pătrate în produsul sumei prin diferența a două expresii:

$$1) x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3); 36a^2 - 100 = (6a - 10)(6a + 10).$$

$$2) \frac{4}{9} a^2 - \frac{16}{25} b^2 = \left( \frac{2}{3} a + \frac{4}{5} b \right) \left( \frac{2}{3} a - \frac{4}{5} b \right).$$

$$3) (1 - 0,01a^2) = (1 + 0,1a) (1 - 0,1a).$$

$$4) (2a - b)^2 - c^2 = [(2a - b) + c] [(2a - b) - c] = (2a - b + c) (2a - b - c).$$

$$5) (x + 1)^2 - (y - z)^2 = (x + 1 + y - z) (x + 1 - y + z).$$

$$6) \frac{4}{9} (x + y)^2 - 25 = \left[ \frac{2}{3} (x + y) - 5 \right] \left[ \frac{2}{3} (x + y) + 5 \right].$$

b) Identitățile  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ;  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$  ne conduc la restrângerea unui pătrat.

$$1) a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2; a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2.$$

$$2) 25x^4 + 10x^2y^2 + y^4 = (5x^2 + y^2)^2.$$

$$3) -6x - x^2 - 9 = -(x^2 + 6x + 9) = -(x + 3)^2.$$

$$4) x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y = (x + y - 1)^2; x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2 - y + 1 = (x - y + 1)^2.$$

c) Identitatea  $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$  folosește la restrângerea unui cub  $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$ .

$$1) x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 = (x + 2y)^3.$$

$$2) z^3 - 6z^2t + 12zt^2 - 8t^3 = (z - 2t)^3.$$

$$3) 125a^3 + 75a^2 + 15a + 1 = (5a + 1)^3.$$

$$4) \frac{27}{64} x^3y^6 + \frac{9}{8} x^2y^4z^2 + xy^2z^4 + \frac{8}{27} z^6 = \left( \frac{3}{4} xy^2 + \frac{2}{3} z^2 \right)^3.$$

d) Identitățile

$$a^3 + b^3 = (a + b) (a^2 - ab + b^2),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) (a^2 + ab + b^2)$$

se aplică la descompunerea unei sume sau diferențe de cuburi.

$$1) 27 + 8a^3 = (3 + 2a) (9 - 6a + 4a^2).$$

$$2) 64 - 27y^3 = (4 - 3y) (16 + 12y + 9y^2).$$

$$3) (x - 5)^3 - (5 + x)^3 = (x - 5 - 5 - x) [(x - 5)^2 + (x - 5)(x + 5) + (x + 5)^2]; (x - 5)^3 - (5 + x)^3 = -10 (3x^2 + 25).$$

*Metoda grupării termenilor* constă în asocierea convenabilă a termenilor polinomului astfel încât polinomul să fie scris ca o sumă de produse cu un factor comun și apoi se scoate acest factor comun.

*Exemple.*

$$1) x^3 + 9 + 3x^2 + 3x = (x^3 + 3x^2) + (3x + 9) = x^2(x + 3) + 3(x + 3) = (x^2 + 3) (x + 3).$$

$$2) ax^2 - bx^2 - bx + ax - a + b = x^2(a - b) + x(a - b) - (a - b) = (x^2 + x - 1) (a - b).$$

$$3) 10ay - 5by + 2ax - bx = 5y(2a - b) + x(2a - b) = (2a - b) (x + 5y).$$

$$4) x^2 - 6x + 5 = x^2 - x - 5x + 5 = x(x - 1) - 5(x - 1) = (x - 5) (x - 1).$$



Pentru a grupa termenii am descompus  $-6x$  într-o sumă de doi termeni  $-x - 5x$ . Polinomul se putea descompune direct aplicând identitatea  $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$  și căutând două numere  $a$  și  $b$  a căror sumă este 6 și produs 5. Cele două numere sînt 1 și 5 deci

$$x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5).$$

$$5) a^2 - b^2 + c^2 - 2ac = a^2 + c^2 - 2ac - b^2 = (a-c)^2 - b^2 = (a-c-b)(a-c+b).$$

Am grupat termenii care formează un pătrat perfect și am obținut o diferență de două pătrate.

$$6) 25 - 9a^2 - 16b^2 + 24ab = 25 - (9a^2 + 16b^2 - 24ab) = 25 - (3a-4b)^2 = (5+3a-4b)(5-3a+4b).$$

$$7) x^4 - 4x^2 - 1 - 4x = x^4 - (4x^2 + 1 + 4x) = x^4 - (2x+1)^2 = (x^2-2x-1)(x^2+2x+1) = (x^2-2x-1)(x+1)^2.$$

$x^2 - 2x - 1$  nu se mai descompune în factori cu coeficienți raționali căci nu există două numere raționale a căror sumă se fie 2 și al căror produs să fie  $-1$ .

$$8) x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2.$$

Am pus în evidență un pătrat perfect adăugînd  $x^2$  pentru a menține egalitatea am adăugat și  $-x^2$  obținînd o diferență de două pătrate:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2+1-x)(x^2+1+x).$$

$$9) 6x^2y^2 - x^4 - y^4 = 4x^2y^2 - (x^4 + y^4 - 2x^2y^2).$$

Am considerat  $6x^2y^2 = 2x^2y^2 + 4x^2y^2$  pentru a forma pătratul perfect  $-x^4 - y^4 + 2x^2y^2 = -(x^4 + y^4 - 2x^2y^2)$ .

$$6x^2y^2 - x^4 - y^4 = 4x^2y^2 - (x^2 - y^2)^2 = (2xy - x^2 + y^2)(2xy + x^2 - y^2).$$

$$10) x^2y^2 - y^2z^2 + z^2u^2 - u^2x^2 + 4xyz u = (x^2y^2 + z^2u^2 + 2xyz u) - (y^2z^2 + u^2x^2 - 2xyz u).$$

Am separat termenii care formează pătrate perfecte considerînd  $4xyz u = 2xyz u + 2xyz u$ .

$$x^2y^2 - y^2z^2 + z^2u^2 - u^2x^2 + 4xyz u = (xy + zu)^2 - (yz - ux)^2 = (xy + zu + yz - ux)(xy + zu - yz + ux).$$

**Observări.** Înainte de a da factori comuni parțiali trebuie să ne asigurăm că grupele făcute conduc la scoaterea în evidență a unui factor comun.

De exemplu, dacă în polinomul  $P(a,b) = a^2 + 2ab - ac + b^2 - bc$  am face următoarea grupare

$$P(a,b) = a(a + 2b - c) + b(b - c),$$

nu ne-ar folosi la descompunerea în factori căci nu apare nici un factor comun. Primul termen are factorii  $a$  și  $(a + 2b - c)$  iar al doilea are factorii  $b$  și  $b - c$ . Dacă scriem însă  $2ab = ab + ab$  și grupăm în mod convenabil termenii

$$P(a,b) = (a^2 + ab - ac) + (ab + b^2 - bc),$$

$$P(a,b) = a(a + b - c) + b(a + b - c). \text{ Apare factorul } (a + b - c).$$

$$P(a,b) = (a + b - c)(a + b).$$

Același polinom se putea descompune observînd că putem separa un pătrat perfect  $a^2 + 2ab + b^2$ :

$$P(a,b) = (a^2 + 2ab + b^2) - (ac + bc),$$

$$P(a,b) = (a + b)^2 - c(a + b),$$

$$P(a,b) = (a + b) (a + b - c).$$

Pentru descompunerea unui polinom în factori este necesar uneori să aplicăm succesiv mai multe metode: în primul rînd scoatem factorii comuni (dacă există), apoi cercetăm dacă în paranteză putem aplica una din identitățile cunoscute eventual grupînd termenii în mod convenabil sau grupăm termenii pentru a scoate în evidență un factor comun.

*Exemple.*

$$1) 5a^2 - 5b^2 = 5(a^2 - b^2) = 5(a + b) (a - b).$$

$$2) 10a^2 - 20ab + 10b^2 = 10(a^2 - 2ab + b^2) = 10(a - b)^2.$$

$$3) 100x^2 - 4(7x - 2y)^2 = 4[25x^2 - (7x - 2y)^2] = 4[5x + (7x - 2y)] \cdot [5x - (7x - 2y)] = 4(5x + 7x - 2y) (5x - 7x + 2y) = 4(12x - 2y) \cdot (-2x + 2y) = 16(6x - y) (y - x).$$

$$4) c(a + b)^3 - c(a - b)^3 = c[(a + b) - (a - b)] [(a + b)^2 + (a + b) \cdot (a - b) + (a - b)^2] = c[a + b - a + b] [a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - b^2 + a^2 - 2ab + b^2] = 2bc(3a^2 + b^2).$$

$$5) 5(a + b)^4 - 5(a - b)^4 = 5[(a + b)^2 - (a - b)^2] [(a + b)^2 + (a - b)^2] = 5(a + b - a + b) (a + b + a - b) \cdot 2(a^2 + b^2) = 40ab(a^2 + b^2).$$

$$6) 25a^4b^4 + 25a^4b^2c^2 + 25a^4c^2 = 25a^4(b^4 + b^2c^2 + c^2) = 25a^4(b^4 + 2b^2c^2 + c^2 - b^2c^2) = 25a^4[(b^2 + c^2)^2 - b^2c^2] = 25a^4(b^2 + c^2 - bc) (b^2 + c^2 + bc).$$

$$7) 5a^2b(1 - a) - 5b(a - 1) + 10ab(1 - a) = 5a^2b(1 - a) + 5b(1 - a) + 10ab(1 - a) = 5b(1 - a) [a^2 + 1 + 2a] = 5b(1 - a) (a + 1)^2.$$

$$8) 7b(1 - a)^2 - 14bc(1 - a) + 7bc^2 = 7b[(1 - a)^2 - 2c(1 - a) + c^2] = 7b(1 - a - c)^2.$$

$$9) 5x^7 + 5x^6 + 5x^4 + 5x^3 = 5x^3(x^4 + x^3 + x + 1) = 5x^3[x^3(x + 1) + (x + 1)] = 5x^3(x + 1) (x^3 + 1) = 5x^3(x + 1) (x + 1) (x^2 - x + 1) = 5x^3(x + 1)^2(x^2 - x + 1).$$

$$10) 5x + 60x^2y - 45x^3 - 20xy^2 = 5x(1 + 12xy - 9x^2 - 4y^2) = 5x[1 - (9x^2 + 4y^2 - 12xy)] = 5x[1 - (3x - 2y)^2] = 5x(1 - 3x + 2y) (1 + 3x - 2y).$$

$$11) 54a^2b^3 - 2a^5b^3 = 2a^2b^3(27 - a^3) = 2a^2b^3(3^3 - a^3) = 2a^2b^3(3 - a) \cdot (9 + 3a + a^2).$$

$$12) 40b^2x^4 - 5xb^5 = 5xb^2(8x^3 - b^3) = 5xb^2(2x - b) (4x^2 + 2bx + b^2).$$

$$13) 250a^4b^4x + 16abx^4 = 2abx(125a^3b^3 + 8x^3) = 2abx(5ab + 2x)(25a^2b^2 - 10abx + 4x^2).$$

$$14) a^3 + 3ab^2 - 3a^2b + c^3 - b^3 = (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) + c^3 = \\ = (a - b)^3 + c^3 = (a - b + c)[(a - b)^2 - (a - b)c + c^2] = \\ = (a - b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - ac + bc).$$

$$15) a^3 - b^3 - 3a^2 - 3b^2 + 3a - 3b - 2 = (a^3 - 3a^2 + 3a - 1) - \\ - (b^3 + 3b^2 + 3b + 1) = (a - 1)^3 - (b + 1)^3 = \\ = (a - 1 - b - 1) \cdot [(a - 1)^2 + (b + 1)^2 + (a - 1)(b + 1)] = \\ = (a - b - 2)(a^2 + b^2 + ab - a + b + 1).$$

$$16) a^3 - b^3 + 3a^2 - 3b^2 + 3a - 3b = (a^3 - b^3) + 3(a^2 - b^2) + 3(a - b) = \\ = (a - b)(a^2 + ab + b^2 + 3a + 3b + 3).$$

*Observare.* Polinomul se mai putea descompune în factori completând polinomul  $a^3 + 3a^2 + 3a$  pentru a deveni cub perfect:  $(a + 1)^3$ ; adăugăm deci  $+1$  și  $-1$  și grupăm termenii:

$$(a^3 + 3a^2 + 3a + 1) - (b^3 + 3b^2 + 3b + 1) = (a + 1)^3 - (b + 1)^3 = \\ = (a + 1 - b - 1)[(a + 1)^2 + (a + 1)(b + 1) + (b + 1)^2] = \\ = (a - b) \cdot (a^2 + 2a + 1 + ab + a + b + 1 + b^2 + 2b + 1) = \\ = (a - b)(a^2 + ab + b^2 + 3a + 3b + 3).$$

$$17) x^6 - y^4 - 4x^3 + 6y^2 - 5 = (x^6 - 4x^3 + 4) - (y^4 - 6y^2 + 9) = \\ = (x^3 - 2)^2 - (y^2 - 3)^2 = (x^3 - 2 + y^2 - 3)(x^3 - 2 - y^2 + 3) = \\ = (x^3 + y^2 - 5)(x^3 - y^2 + 1).$$

Am separat un pătrat perfect

$$x^6 - 4x^3 = (x^6 - 4x^3 + 4) - 4 \text{ adăugînd } +4 - 4.$$

$$18) x^6 - 3x^4 - 4ax^3 + 6ax + 4a^2 = (x^6 - 4ax^3 + 4a^2) + (6ax - 3x^4) = \\ = (x^3 - 2a)^2 + 3x(2a - x^3) = (x^3 - 2a)(x^3 - 2a - 3x) = \\ = (x^3 - 2a)(x^3 - 3x - 2a).$$

Separăm pătratul perfect  $x^6 + 4a^2 - 4ax^3$ .

$$19) x^4 - 5x^3 + 3yx^2 - 10x^2 + 25x - 15y + 25 = (x^4 - 10x^2 + 25) - \\ - 5x^3 + 3yx^2 + 25x - 15y = (x^2 - 5)^2 - 5x(x^2 - 5) + 3y(x^2 - 5) = \\ = (x^2 - 5)(x^2 - 5 - 5x + 3y) = (x^2 - 5)(x^2 - 5x + 3y - 5)$$

Separăm pătratul perfect  $x^4 - 10x^2 + 25$ .

### Cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun ale mai multor polinoame

Cel mai mare divizor comun a două sau mai multe polinoame este orice polinom de gradul cel mai mare care divide fiecare din polinoamele date. Pentru găsirea c.m.m.d.c. este necesar să le descompunem în factori și să formăm un produs cu factorii comuni cu exponenții cei mai mici.\*

\* Dar un polinom se divide întotdeauna cu un număr real, deci există o infinitate de polinoame cu coeficienți proporționali care reprezintă c.m.m.d.c. a două polinoame.



$$1) 14x - 28y \quad \text{și} \quad 7x^2 - 28y^2.$$

$$14(x - 2y) = 2 \cdot 7(x - 2y),$$

$$7x^2 - 28y^2 = 7(x^2 - 4y^2) = 7(x - 2y)(x + 2y).$$

$$\text{c.m.m.d.c.} = 7k(x - 2y), \quad k \text{ fiind orice număr real nenul.}$$

$$2) a^2x^2(a^2 - x^2); \quad a^4x - a^3x^2; \quad a^2x(a - x).$$

$$a^2x^2(a^2 - x^2) = a^2x^2(a - x)(a + x)$$

$$a^4x - a^3x^2 = a^3x(a - x)$$

$$a^2x(a - x) = a^2x(a - x)$$

---


$$\text{c.m.m.d.c.} = ka^2x(a - x).$$

Cel mai mic multiplu comun este un polinom de gradul cel mai mic care se divide la fiecare din polinoamele date.

$$1) \quad 2x^2 - 4xy + 2y^2; \quad 6(x^2 - y^2); \quad 12x - 12y.$$

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 = 2(x - y)^2$$

$$6(x^2 - y^2) = 2 \cdot 3(x + y)(x - y)$$

$$12x - 12y = 2^2 \cdot 3(x - y).$$

Un polinom care să se dividă cu fiecare dintre polinoamele de mai sus trebuie să conțină ca factori pe  $2^2 \cdot 3$ , pe  $(x + y)$  și pe  $(x - y)^2$  deci c.m.m.m.c. al polinoamelor de mai sus va fi de forma  $12k(x + y)(x - y)^2$ ,  $k$  fiind orice număr real nenul.

$$2) a^2 + 2a + 4, \quad a^2 - 4, \quad a^3 + 8.$$

$$a^2 + 2a + 4 = (a + 2)^2$$

$$a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$$

$$a^3 + 8 = (a + 2)(a^2 - 2a + 4)$$

---


$$\text{c.m.m.m.c.} = k(a + 2)^2(a - 2)(a^2 - 2a + 4).$$

În practică pentru a lucra cu polinoamele cele mai simple considerăm la aflarea c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.  $k = 1$ .

# V

## Operații cu numere și cu polinoame

### Adunarea

Adunarea numerelor întregi pozitive (inclusiv zero)

1°. Suma a două numere de câte o cifră se poate stabili cu ajutorul unui tabel în care figurăm șirurile

$S_0, S_1 \dots S_9$  unde  $S_a$  este  $a, a + 1, a + 2, a + 3 \dots, a + 9$ .

$S_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$S_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S_2$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$S_3$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$S_4$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$S_5$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$S_6$	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$S_7$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$S_8$	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$S_9$	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Suma  $(a + b)$  se găsește în tabel la intersecția liniei lui  $S_a$  cu coloana corespunzătoare lui  $b$ .

De exemplu:  $7 + 6 = 13$ , 13 se află pe linia  $S_7$  și pe coloana 6 (la 7 se adaugă unități).

$63 + 9 = 72$ , 72 este la intersecția liniei  $S_3$  cu coloana 9 (la 3 se adaugă 9 unități).

2° Adunarea numerelor cu mai multe cifre se face folosind scrierea sistematică a numărului ( $N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0$ ) și aplicând proprietățile adunării (comutativitatea și asociativitatea)

$$A = a_n 10^n + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0,$$

$$B = b_k 10^k + \dots + b_2 10^2 + b_1 10 + b_0.$$

Considerăm pentru fixarea ideilor  $n > k$ .

$$A + B = (a_0 + a_1 10 + \dots + a_n 10^n) + (b_0 + b_1 10 + b_2 10^2 + \dots + b_k 10^k).$$

Aplicînd comutativitatea și asociativitatea adunării

$$A + B = a_n 10^n + \dots + a_k 10^k + b_k 10^k + \dots + a_1 10 + b_1 10 + a_0 + b_0.$$

Dar  $10^k a_k + 10^k b_k = 10^k \cdot (a_k + b_k)$  (vezi distributivitatea înmulțirii față de adunare) deci:

$$A + B = a_n 10^n + \dots + (a_k + b_k) 10^k + \dots + (a_1 + b_1) 10 + (a_0 + b_0).$$

*Exemple.*

$$1) 235 + 23 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5 + 2 \cdot 10 + 3.$$

Aplicînd comutativitatea

$$235 + 23 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 5 + 3.$$

Aplicînd asociativitatea și proprietatea de distributivitate

$$235 + 23 = 2 \cdot 100 + (3 + 2) \cdot 10 + (5 + 3)$$

$$235 + 23 = 200 + 50 + 8 = 258.$$

**Practic:** Pentru a aduna două numere de mai multe cifre adunăm unitățile de același ordin între ele și apoi facem suma acestor rezultate.

Pentru ușurarea calculelor numerele se așază unele sub altele astfel încît unitățile de același ordin să fie unele sub altele.

Dacă suma unităților de un anumit ordin este mai mare decît 9 se transformă ceea ce depășește în unități de ordin imediat superior și se adaugă la suma acestor unități. Calculul scris se face începînd cu unitățile de ordinul cel mai mic.

$$\text{Exemple. } 1) 98 + 76 = (90 + 70) + (8 + 6) = 160 + 14 = 100 + 60 + 10 + 4 = 174.$$

$$2) \begin{array}{r} 427 + \\ 243 \\ \hline 670 \end{array}$$

7 unități + 3 unități = 10 unități deci avem 1 zece și nici o unitate simplă punem cifra 0 la unități iar 1 zece o adunăm la zeci: 1 zece + 4 zeci + 2 zeci = 7 zeci

Trecem 7 la zeci

$$2 \text{ sute} + 4 \text{ sute} = 6 \text{ sute. Trecem 6 la sute.}$$



În mod analog se procedează cînd avem de adunat mai multe numere

$$S = 8392 + 2036 + 4795$$

$$S = 8 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 2 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10 + 6 + 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 5$$

$$S = (8 + 2 + 4) \cdot 10^3 + (3 + 7) \cdot 10^2 + (9 + 3 + 9) \cdot 10 + 2 + 6 + 5$$

$$S = 14 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^2 + 21 \cdot 10 + 13$$

Dar 14 mii = 1 zeci de mii + 4 mii; 10 sute = 1 mie; 21 zeci = 2 sute + 1 zece;  
13 unități simple = 1 zeci + 3 unități simple

$$S = 1 \cdot 10^4 + (4 + 1) \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + (1 + 1) \cdot 10 + 3 = 15\,223.$$

Scriind numerele unul sub altul astfel ca unitățile de același ordin să fie în aceeași coloană obținem

8392 +	$2u + 6u + 5u = 13u = 1 \text{ zece} + 3 \text{ unități}$
2036	$1z + 9z + 3z + 9z = 22z = 2 \text{ sute} + 2 \text{ zeci}$
4795	$2s + 7s + 3s = 12s = 1 \text{ mie} + 2 \text{ sute}$
<u>15223</u>	$1 \text{ mie} + 4 \text{ mii} + 2 \text{ mii} + 8 \text{ mii} = 15 \text{ mii} = 1 \text{ zeci de mii} + 5 \text{ mii}.$

### Scăderea a două numere naturale

1. Scăderea a două numere dacă scăzătorul are o singură cifră se face direct pe baza definiției scăderii (operație inversă a adunării). Pentru a efectua scăderea  $a - b$  trebuie găsit numărul  $c$  pentru care  $b + c = a$ .

2. Scăderea a două numere de mai multe cifre se face analog cu adunarea.

$$A = a_n 10^n + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

$$B = b_k 10^k + \dots + b_2 10^2 + b_1 10 + b_0, n \geq k$$

$$A - B = a_n 10^n + \dots + (a_k - b_k) 10^k + \dots + (a_2 - b_2) 10^2 + (a_1 - b_1) 10 + (a_0 - b_0).$$

Dacă scăderile din paranteză nu se pot efectua în mulțimea numerelor naturale adăugăm la descăzut 10 unități obținute prin transformarea unei unități de ordin imediat superior.

*Exemple.*

$$1) 7356 - 123 = 7 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6 - (1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3)$$

$$7356 - 123 = 7 \cdot 10^3 + (3 - 1) 10^2 + (5 - 2) 10 + (6 - 3) = 7233$$

$$2) 2397 - 456 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 7 - (4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6)$$

$$2397 - 456 = 2 \cdot 10^3 + (3 - 4) 10^2 + (9 - 5) 10 + (7 - 6)$$

$$3 < 4; 1 \text{ mie} = 10 \text{ sute}; 10 \text{ sute} + 3 \text{ sute} = 13 \text{ sute}$$

$$2397 - 456 = 1 \cdot 10^3 + (13 - 4) 10^2 + (9 - 5) 10 + (7 - 6) = 1941$$

Practic numerele nu se scriu sub forma sistematică: se scad pe rînd unitățile de același ordin începînd de la dreapta spre stînga (unitățile de ordinul I).

*Adunarea și scăderea fracțiilor.* Pentru a aduna (scădea) două fracții care nu au același numitor se vor înlocui cu fracții echivalente care au același numitor.

Prin amplificare putem obține totdeauna fracții echivalente cu fracțiile date care să aibă același numitor. Numitorul comun va fi un multiplu comun al numitorilor; îl vom alege pe cel mai mic.

Pentru a aduce mai multe fracții la același numitor amplificăm fiecare fracție cu cîtuș dintre numitorul comun găsit (cel mai mic multiplu comun al numitorilor) și numitorul fracției respective.

*Exemple.* Să se aducă următoarele fracții la același numitor:  $\frac{3}{7}, \frac{5}{14}, \frac{2}{21}$ . Numitorul comun:  $2 \cdot 3 \cdot 7$ .

Înlocuim fracțiile date cu fracții echivalente cu numitorul 42. Notăm sus la stînga fiecărei fracții cîtuș împărțirii numitorului comun (42) la numitorul respectiv.

$$\begin{array}{ccc} 6) & 3) & 2) \\ \frac{3}{7} = \frac{18}{42}; & \frac{5}{14} = \frac{15}{42}; & \frac{2}{21} = \frac{4}{42}. \end{array}$$

*Observări 1.* Dacă numitorii sînt numere prime între ele numitorul comun va fi produsul numitorilor.

2. Înainte de a aduce fracțiile la același numitor este bine să le simplificăm (dacă e cazul).

*Exemple. 1)*  $S = \frac{11}{270} + \frac{7}{495}$ .

$$S = \frac{121}{2970} + \frac{42}{2970} = \frac{163}{2970}$$

$$\begin{array}{r|l} 270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 & 11 \\ 495 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11 & 6 \\ \hline \text{c.m.m.m.c.} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11. \end{array}$$

$$2) S = \frac{3}{442} + \frac{6}{494} \quad S = \frac{3 \cdot 19 + 6 \cdot 17}{8398} = \frac{159}{8398}$$

Nu simplificăm fracția  $\frac{6}{494}$  căci factorul 2 va figura în numitorul comun

$$\begin{array}{r|l} 442 & 2 \\ 221 & 13 \\ 17 & 17 \\ 1 & \\ \hline 442 = 2 \cdot 13 \cdot 17 & 19 \\ 494 = 2 \cdot 13 \cdot 19 & 17 \\ \hline \text{c.m.m.m.c.} = 2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \end{array}$$

Dacă simplificăm fracția  $\frac{6}{494}$ , obținem același numitor 8398, în acest caz fracția  $\frac{3}{247}$  se amplifică cu 34.

3)  $S = \frac{5}{750} + \frac{3}{150}$ . Ambele fracții se pot simplifica dar nu este util să simplificăm fracția  $\frac{3}{150}$  căci și numitorul 750 are factorul 3.

$$S = \frac{1}{150} + \frac{3}{150} = \frac{4}{150}$$

$$S = \frac{4}{150} = \frac{2}{75}$$

4)  $A = \frac{12}{175} - \frac{11}{325}$ . Aducem la același numitor

$$A = \frac{156}{2275} - \frac{77}{2275} = \frac{79}{2275}$$

$$\begin{array}{r|l} 175 = 5^2 \cdot 7 & 13 \\ 325 = 5^2 \cdot 13 & 7 \end{array}$$

$$\text{c.m.m.m.c.} = 5^2 \cdot 7 \cdot 13$$

5)  $A = \frac{15}{175} - \frac{4}{65}$ . Simplificăm prima fracție (5 intră în 65 la puterea întâi) iar în 175 la puterea a doua).

$$A = \frac{3}{35} - \frac{4}{65}. \text{ Aducem la același numitor.}$$

$$A = \frac{39}{455} - \frac{28}{455} = \frac{11}{455}.$$

$$6) S = \frac{3}{17} + \frac{2}{25} + \frac{14}{17} + \frac{3}{25},$$

Aplicăm proprietățile adunării numerelor fracționare (comutativitatea și asociativitatea)

$$S = \frac{3}{17} + \frac{14}{17} + \left( \frac{2}{25} + \frac{3}{25} \right) = 1 + \frac{5}{25} = 1 \frac{1}{5}.$$

$$7) S = \frac{5}{19} + \frac{4}{35} + \frac{7}{19} + \frac{3}{35} - \frac{7}{35} = \frac{5}{19} + \frac{7}{19} + \left( \frac{4}{35} + \frac{3}{35} - \frac{7}{35} \right) = \frac{12}{19}.$$

Pentru a aduna (scădea) două numere mixte aplicăm proprietățile adunării, comutativitatea și asociativitatea: adunăm (scădem) părțile întregi între ele și fracțiile între ele. Dacă fracția obținută la adunarea fracțiilor este supraunitară scoatem întregii și-i adunăm la partea întreagă. Dacă fracția de la scăzut este mai mică decât fracția de la scăzător introducem la fracția scăzut un întreg de la partea întreagă.

*Exemple.*

$$1) 15 \frac{3}{7} + 7 \frac{2}{7} = 15 + 7 + \left( \frac{3}{7} + \frac{2}{7} \right) = 22 \frac{5}{7}.$$

$$2) 7 \frac{5}{7} + 3 \frac{3}{7} = 10 + \frac{8}{7} = 10 + 1 \frac{1}{7} = 11 \frac{1}{7}.$$



$$3) \quad 7 \frac{5}{12} - 3 \frac{1}{12} = 7 - 3 + \frac{5}{12} - \frac{1}{12} = 4 \frac{4}{12} = 4 \frac{1}{3}.$$

$$4) \quad 11 \frac{7}{15} - 2 \frac{4}{15} - 9 \frac{3}{15} = 0 \quad \left( 11 - 2 - 9 = 0 \quad \frac{7}{15} - \frac{4}{15} - \frac{3}{15} = 0 \right).$$

$$5) \quad 12 \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = 12 \frac{2}{4} - \frac{3}{4} = 11 \frac{6}{4} - \frac{3}{4} = 11 \frac{3}{4}.$$

$$6) \quad 256 \frac{3}{121} - 137 \frac{1}{11} = 119 \frac{3}{121} - \frac{11}{121} = 118 \frac{124 - 11}{121} = 118 \frac{113}{121}.$$

### Adunarea și scăderea numerelor zecimale

Pentru a aduna (scădea) două numere zecimale adunăm (scădem) cele două numere după regulile stabilite la numerele naturale avînd grijă să adunăm (scădem) numai unități de același ordin.

$S = 0,5 + 0,32 + 0,253$ . La sumă avem 3 miimi;  $(5 + 2 = 7)$  7 sutimi;  
 $S = 1,073$   $(2 + 3 + 5 = 10)$  10 zecimi = 1 unitate simplă.

În adevăr,  $S = \frac{5}{10} + \frac{32}{100} + \frac{253}{1000}$ . Numitor comun este 1000.

$$S = \frac{500}{1000} + \frac{320}{1000} + \frac{253}{1000} = \frac{500 + 320 + 253}{1000} = \frac{1073}{1000}.$$

Am efectuat o sumă de fracții ordinare cu același numitor, deci suma numerelor zecimale s-a redus la o sumă de numere naturale. Practic numerele se scriu unele sub altele astfel ca unitățile de același ordin să fie unele sub altele și facem adunarea (scăderea) ca la numerele naturale avînd grijă să punem virgula la rezultat după ce am adunat partea fracționară.

*Exemple.* 1)  $S = 127,53 + 0,0123 + 2,307 = 129,8493$

Unitățile de ordinul cel mai mic: 3 zecimi  $127,53 +$   
 de miimi; miimi:  $7 + 2 = 9$ ; sutimi:  $1 + 3 = 4$ ;  $0,0123$   
 zecimi  $3 + 5 = 8$ ; unități simple  $2 + 7 = 9$ ;  $2,307$   
 zeci 2; sute 1  $\underline{129,8493}$

Așezarea numerelor unele sub altele nu este esențială, putem face adunarea și direct ținînd însă seama de ordinele cifrelor.

2)  $127,53 - 24,053 = 103,477$ . La descăzut nu avem miimi; luăm o sutime și o transformăm în 10 miimi,  $10 \text{ miimi} - 3 \text{ miimi} = 7 \text{ miimi}$ .

$$\begin{array}{r} 127,53 \\ - 24,053 \\ \hline 103,477 \end{array}$$

La descăzut au rămas 2 sutimi din care nu putem scădea 5 sutimi. Luăm o zecime și obținem  $10 + 2 = 12$  (sutimi).

$12 \text{ sutimi} - 5 \text{ sutimi} = 7 \text{ sutimi}$  au rămas 4 zecimi

$$7u - 4u = 3u$$

$$2z - 2z = 0 \text{ z.}$$

*Exerciții de adunare și scădere cu numere fracționare*

a) Frații zecimale

$A = 3 \frac{2}{5} - 0,75$ . Transformăm fracția  $\frac{2}{5}$  în număr zecimal

$A = 3,4 - 0,75 = 2,65$ . Scădem numerele zecimale.

Scăderea se putea efectua și scriind numărul zecimal ca fracție ordinară.

$A = 3 \frac{2}{5} - \frac{75}{100}$ . Simplificăm cu 5.

$$A = 3 \frac{2}{5} - \frac{15}{20} = 3 \frac{8}{20} - \frac{15}{20} = 2 \frac{28-15}{20} = 2 \frac{13}{20}.$$

b) Frații ordinare și fracții zecimale

$A = 15 \frac{2}{3} + 1,25 - 2 \frac{5}{7}$ . Frațiile  $\frac{2}{3}$  și  $\frac{5}{7}$  nu se pot scrie sub formă de numere zecimale cu un număr finit de zecimale.

Transformăm în fracții ordinare

$$A = 15 \frac{2}{3} + 1 \frac{25}{100} - 2 \frac{5}{7} = 15 \frac{2}{3} + 1 \frac{1}{4} - 2 \frac{5}{7}$$

$$A = 16 - 2 + \frac{2 \cdot 28}{84} + \frac{21}{84} - \frac{60}{84} = 14 \frac{56+21-60}{84}.$$

$$A = 14 \frac{17}{84}.$$

**Concluzii.** În exercițiile în care avem de adunat și scăzut fracții ordinare și numere zecimale lucrăm în numere zecimale numai dacă fracțiile ordinare pot fi înlocuite prin fracții zecimale echivalente (fracții ireductibile cu numitorii numere de forma  $2^\alpha \cdot 5^\beta$ ,  $\alpha$  și  $\beta$  numere naturale). Dacă avem și fracții ordinare care au la numitor și alți factori diferiți de 2 sau 5 atunci transformăm numerele zecimale în fracții ordinare.

## Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice

**Regulă.** Pentru a aduna (scădea) două sau mai multe fracții algebrice aducem fracțiile la același numitor apoi facem suma (diferența) numărătorilor și dăm numitorul comun.

**Exemple.** 1) Numitorii sînt monoame.

$$E = \frac{b^2}{a^3b} \frac{3a-b}{a^3b} + \frac{ab}{a^2b^2} \frac{2a-3b}{a^2b^2} - \frac{a^2}{ab^3} \frac{3a-2b}{ab^3}. \text{ Numitorul comun } a^3b^3 \ (a \neq 0), \ (b \neq 0).$$

$$E = \frac{b^2(3a-b) + ab(2a-3b) - a^2(3a-2b)}{a^3b^3}. \text{ Efectuăm înmulțirile la numărător:}$$

$$E = \frac{3ab^2 - b^3 + 2a^2b - 3ab^2 - 3a^3 + 2a^2b}{a^3b^3}. \text{ Strîngem termenii asemenea:}$$

$$E = \frac{4a^2b - b^3 - 3a^3}{a^3b^3}.$$

2) Numitorii sînt polinoame descompuse în factori ireductibili.

$$E = \frac{a}{(a-b)(a+b)} - \frac{b}{2(a-b)^2} + \frac{a}{6(a+b)^2}.$$

Numitorul comun este  $6(a-b)^2(a+b)^2$ , ( $a-b \neq 0$ ;  $a+b \neq 0$ ).

$$E = \frac{6a(a-b)(a+b) - 3b(a+b)^2 + a(a-b)^2}{6(a-b)^2(a+b)^2}.$$

Efectuăm calculele la numărător

$$E = \frac{6a(a^2 - b^2) - 3b(a^2 + 2ab + b^2) + a(a^2 - 2ab + b^2)}{6(a-b)^2(a+b)^2}.$$

$$E = \frac{6a^3 - 6ab^2 - 3a^2b - 6ab^2 - 3b^3 + a^3 - 2a^2b + ab^2}{6(a-b)^2(a+b)^2}.$$

Strîngem termenii asemenea și ordonăm:

$$E = \frac{7a^3 - 5a^2b - 11ab^2 - 3b^3}{6(a-b)^2(a+b)^2}.$$

3) Numitorii, polinoame reductibile.

$$a) E = \frac{6x+1}{30x^2-30} + \frac{1}{36x+36} - \frac{1}{45x-45}.$$

Numitorul comun se stabilește după ce s-au descompus numitorii în factori.

$$E = \frac{6x+1}{2 \cdot 3 \cdot 5(x-1)(x+1)} + \frac{1}{2^2 3^2(x+1)} - \frac{1}{3^2 \cdot 5(x-1)}.$$

Numitorul comun este  $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5(x-1)(x+1)$ . Produsul factorilor comuni și necomuni luați cîte o singură dată la puterea cea mai mare

$$E = \frac{6 \cdot (6x+1) + 5(x-1) - 4(x+1)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5(x-1)(x+1)}, \quad (x-1 \neq 0; x+1 \neq 0).$$

Efectuăm înmulțirile la numărător

$$E = \frac{36x+6+5x-5-4x-4}{2^2 \cdot 3^2 5(x-1)(x+1)},$$

Strîngem termenii asemenea la numărător

$$E = \frac{37x-3}{180(x^2-1)}.$$

$$b) E = \frac{1-3x}{9x^2-4} + \frac{2}{2-3x} - \frac{5}{2+3x}.$$

Numitorul comun este  $(3x-2)(3x+2)$ , ( $3x-2 \neq 0$ ;  $3x+2 \neq 0$ ).

A doua fracție are numitorul  $2-3x = -(3x-2)$  scriem această fracție cu numitorul  $3x-2$  și schimbăm semnul înaintea liniei de fracție.

$$E = \frac{1-3x}{(3x-2)(3x+2)} - \frac{2}{3x-2} - \frac{5}{2+3x}.$$



Aducem la același numitor

$$E = \frac{1 - 3x - 2(3x + 2) - 5(3x - 2)}{(3x + 2)(3x - 2)},$$

$$E = \frac{1 - 3x - 6x - 4 - 15x + 10}{(3x - 2)(3x + 2)},$$

$$E = \frac{7 - 24x}{(3x - 2)(3x + 2)}.$$

## Înmulțirea

1. Înmulțirea numerelor naturale (inclusiv 0).

a) Factorii au câte o singură cifră. Produsul se poate citi direct pe tabelul următor la intersecția coloanei în care primul număr este unul din factori cu linia în care primul număr este celălalt factor

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

*Exemplu.* Produsul  $3 \cdot 7$  se găsește pe coloana a 3-a și pe linia a 7-a;  $3 \cdot 7 = 21$ .  
Produsul  $6 \times 9$  se găsește pe coloana a 6-a și pe linia a 9-a  $6 \cdot 9 = 54$ .

Tabelul se formează în felul următor: în prima linie se trec în ordine primele numere naturale, linia a 2-a se formează adunând numărul corespunzător din prima linie cu el însuși, linia a treia numerele corespunzătoare din linia I și linia a II-a; linia a IV-a adunând numerele corespunzătoare din linia a III-a și a I ș.a.m.d.

Deci fiecare număr din linia a  $n$ -a (o linie oarecare) reprezintă suma a  $n$  termeni egali, fiecare termen fiind egal cu numărul corespunzător din coloana I. De exemplu:

21 care se găsește pe linia a 3-a reprezintă suma  $(7 + 7 + 7)$  pentru că numărul din linia I corespunzător lui 21 este 7. Numărului 32 care se găsește pe linia a 4-a îi corespunde în linia I numărul 8 deci  $32 = 8 + 8 + 8 + 8 = 8 \cdot 4$ .

Numărul 32 se mai găsește și pe linia a 8-a și-i corespunde în linia I numărul 4 deci  $32 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \cdot 8$ .

b) Înmulțirea unui număr natural cu  $10^n$ .

Pentru a înmulți un număr cu  $10^n$  adăugăm la dreapta numărului  $n$  zerouri.

În adevăr, înmulțind cu 10, numărul se mărește de 10 ori; fiecare cifră devenind de ordinul imediat superior.

$$23 \cdot 10 = 230$$

3 unități devin 3 zeci,

2 zeci devin 2 sute.

Înmulțind cu 100 numărul se mărește de 100 ori deci ordinul fiecărei cifre se mărește cu 2.

$$35 \cdot 100 = 3500$$

5 unități devin 5 sute,

3 zeci devin 3 mii.

În general înmulțind cu  $10^n$  numărul se mărește de  $10^n$  ori deci ordinul fiecărei cifre se mărește cu  $n$ .

c) Un factor de mai multe cifre, un factor de o cifră

$$P = (a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^n) \cdot a,$$

$P = a a_0 + a a_1 \cdot 10 + a a_2 \cdot 10^2 + \dots + a a_n \cdot 10^n$ . Am aplicat distributivitatea înmulțirii față de adunare.

Pentru a înmulți un număr de mai multe cifre cu un număr de o cifră înmulțim pe rând cu înmulțitorul numărul unităților, al zecilor, al sutelor ș.a.m.d. apoi adunăm aceste produse.

$$\text{Exemplu. } P = 2356 \cdot 5.$$

$$P = (2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6) \cdot 5. \text{ Scrierea sistematică a numărului.}$$

$$P = 5 \cdot 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 5 \cdot 10 + 5 \cdot 6. \text{ S-a aplicat distributivitatea înmulțirii față de adunare.}$$

$$P = 10 \cdot 10^3 + 15 \cdot 10^2 + 25 \cdot 10 + 3 \cdot 10. \text{ Efectuăm calculele și scriem sistematic numărul.}$$

$$P = 10^4 + 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 10,$$

$$P = 10^4 + 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10,$$

$$P = 11780.$$

Practic calculele se fac mintal și se scriu numai cifrele obținute ca unități, zeci ș.a.m.d.

d) Factorii au mai multe cifre

$$P = 43 \cdot 52$$

$$P = 43 \cdot (5 \cdot 10 + 2). \text{ Am scris sistematic înmulțitorul.}$$

$$P = 43 \cdot 5 \cdot 10 + 43 \cdot 2. \text{ Am aplicat distributivitatea înmulțirii față de adunare,}$$

$$P = 2150 + 86 = 2236.$$

Pentru a înmulți două numere de mai multe cifre înmulțim unul din factori pe rând cu numărul unităților, al zecilor al sutelor (ș.a.m.d) celui de al doilea factor și însumăm apoi aceste produse parțial obținute.

Practic produsele parțiale se scriu unele sub altele pentru a ușura calculele.

$$\begin{array}{r}
 43 \times \quad \text{sau} \quad 43 \times \quad 43u \cdot 2 = 86 \text{ unități} \\
 \underline{52} \quad \quad \quad \underline{52} \quad 43u \cdot 50 = 2150 \text{ unități sau } 215 \text{ zeci.} \\
 86 \quad \quad \quad 86 \\
 \underline{2150} \quad \quad \underline{215} \\
 2236 \quad \quad \quad 2236
 \end{array}$$

Pentru ușurarea scrisului zerourile produselor parțiale obținute prin înmulțirea de înmulțitului cu un număr de zeci, sute ș.a.m.d., nu se mai scriu avînd grijă însă ca cifrele, de diferite ordine ale produsului parțial, să fie scrise unele sub altele.

*Exemple.*

$$\begin{array}{r}
 1) \quad 75000 \times \\
 \quad \quad 320 \\
 \hline
 \quad \quad 150 \\
 \quad \quad 225 \\
 \hline
 24000000
 \end{array}$$

Calculăm  $75 \cdot 32 \cdot 1000 \cdot 10$ . Deci la produsele parțiale nu considerăm și zerourile de la sfîrșitul factorilor. Ele se vor adăuga la dreapta rezultatului. (Vom mări rezultatul de 10000 ori)

$$\begin{aligned}
 75 \cdot 32 &= 2400, \\
 75000 \cdot 320 &= 24000000.
 \end{aligned}$$

$$2) \quad 2500 \cdot 2325 = 5812500$$

$$\begin{array}{r}
 2325 \times \\
 \quad 2500 \\
 \hline
 11625 \\
 4650 \\
 \hline
 5812500
 \end{array}$$

Pentru simplificarea calculelor aplicăm comutativitatea. Calculăm produsul  $2325 \cdot 25$  apoi înmulțim cu 100  $58125 \cdot 100$  (Adăugăm două zerouri la dreapta).

## Înmulțirea numerelor zecimale

*Regulă.* Pentru a înmulți două numere zecimale, efectuăm înmulțirea numerelor întregi obținute prin omiterea virgulelor, apoi la produs despărțim de la dreapta la stînga atîtea cifre cîte au la partea zecimală ambii factori împreună.

*Exemple.*

$$1) \quad 37,25 \cdot 1,5 = 55,875 \quad \frac{3725}{100} \cdot \frac{15}{10} = \frac{3725 \cdot 15}{1000} = \frac{55875}{1000}$$

$$\begin{array}{r}
 37,25 \times \\
 \quad 1,5 \\
 \hline
 18 \ 625 \\
 37 \ 25 \\
 \hline
 55,875
 \end{array}$$

Am efectuat produsul

$$3725 \cdot 15 = 55875.$$

Am obținut 55875 miimi = 55 unități și 875 miimi deci 55,875.



$$2) \quad 125,03 \cdot 1,042 = 130,28126$$

$$\frac{12503}{100} \cdot \frac{1042}{1000} = \frac{12503 \cdot 1042}{100 \cdot 1000}$$

$$\begin{array}{r} 125,03 \times \\ 1,042 \\ \hline 25006 \\ 50012 \\ 12503 \\ \hline 130,28126 \end{array}$$

Înmulțim numerele naturale 12 503 și 1042. Produsul s-a mărit de  $100 \cdot 1000$  ori  
Împărțim rezultatul la 100000.  
Despărțim la produs ( $2 + 3 = 5$ ) 5 cifre de la dreapta la stînga.

## Împărțirea

**Împărțirea numerelor naturale.** a) *Deîmpărțitul are două cifre, împărțitorul o singură cifră.*

Împărțirea se face, în acest caz, cu ajutorul tabelului de înmulțire. Aflăm care este numărul care înmulțit cu împărțitorul să ne dea pe deîmpărțit (împărțire exactă) sau cel mai mare număr care înmulțit cu împărțitorul să ne dea un număr mai mic decît deîmpărțitul — rămînînd un rest mai mic decît împărțitorul — (împărțire cu rest).

Proba împărțirii se face pe baza relației cunoscute

$$\text{Deîmpărțitul} = \text{Împărțitorul} \times \text{Cîtul} + \text{Restul}.$$

*Exemple.* 1)  $63 : 7 = 9$ ,  $9 \cdot 7 = 63$ .

$$2) \quad 65 : 7 = 9(\text{rest } 2), \quad 65 = 9 \cdot 7 + 2.$$

b) *Împărțirea unui număr de mai multe cifre la un număr de o cifră.*

$$A = (a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0) : a.$$

Aplicăm distributivitatea împărțirii față de adunare.

$$A = (a_n : a) \cdot 10^n + (a_{n-1} : a) 10^{n-1} + \dots + (a_2 : a) 10^2 + (a_1 : a) \cdot 10 + a_0 : a.$$

**Regulă.** Pentru a împărți un număr de mai multe cifre la un număr de o cifră, împărțim numărul unităților de diferite ordine, începînd cu ordinul cel mai mare, cu numărul de o cifră. Dacă o împărțire nu se face exact, transformăm restul în unități de ordinul imediat inferior și-l adunăm cu numărul de unități ale acestui ordin apoi continuăm împărțirea.

*Exemple.*

$$1) \quad 8462 : 2; (8 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 2) : 2.$$

Aplicînd distributivitatea, avem

$$8462 : 2 = 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 = 4231.$$

Practic nu se mai scrie numărul sistematic iar calculele se fac mintal.

*Scris*

$$8462 : 2 = 4231$$

$$\text{Proba: } 4231 \cdot 2 = 8462$$

*Mintal*

$$8 \text{ mii} : 2 = 4 \text{ mii}$$

$$4 \text{ sute} : 2 = 2 \text{ sute}$$

$$6 \text{ zeci} : 2 = 3 \text{ zeci}$$

$$2 \text{ unități} : 2 = 1 \text{ unitate}$$

$$2) \quad 8526 : 3 = 2842$$

În scris pentru ușurință calculul se poate așeza astfel

8526	3	Scriind produsele parțiale sub unitățile respective facem diferența la care alăturăm la dreapta cifra următoare a deîmpărțitului.
6	2842	
25		
24		
12		
= 6		
=		

8 mii : 3, obținem 2 mii.  
 Rămân 2 mii = 20 sute:  $20 + 5 = 25$   
 25 sute : 3 Obținem 8 sute.  
 Rămâne 1 sută = 10 zeci  $10z + 2z = 12z$   
 12 zeci : 3 = 4 zeci 6 unități : 3 = 2 unități

Proba.  $2842 \cdot 3 = 8526$ .

Practic produsele parțiale nu se mai scriu

$$3) \quad 7200 : 7 = 1028 \text{ rest } 4.$$

7200	7
= 20	1028
60	
4	

7 mii : 7 = 1 mie  
 $2 < 7$  deci  
 2 sute = 20 zeci  
 20 zeci : 7 obținem 2 zeci  
 rămân 60 unități  
 $60 : 7 = 8$  Avem 8 unități și rămân 4 unități

Proba.  $1028 \cdot 7 + 4 = 7196 + 4 = 7200$

c) *Împărțirea numerelor de mai multe cifre.* A =  $475 : 25$ . 1°. Aflăm de câte ori se cuprinde numărul unităților de ordinul cel mai mare al împărțitorului în numărul unităților de ordinul cel mai mare al deîmpărțitului. Dacă împărțirea nu e posibilă se consideră de la deîmpărțit numărul de unități de ordin imediat inferior. În exemplul nostru  $4 : 2 = 2$  ( $400 : 20 = 20$ ).

2°. Înmulțim cîțul parțial obținut cu împărțitorul și dacă produsul este mai mic decît numărul unităților considerat la deîmpărțit, îl scădem din acest număr. În acest caz cîțul parțial obținut este prima cifră a cîțului (de ordinul cel mai mare). Dacă produsul este mai mare decît numărul unităților considerat la deîmpărțit, micșorăm cîțul parțial cu o unitate și repetăm calculele. Dacă scăderea se poate face atunci acest număr reprezintă numărul unităților de ordinul cel mai mare al cîțului.

În exemplul nostru:

$$25 \cdot 2 = 50, \quad 50 > 47.$$

Micșorăm cîțul parțial cu o unitate  $2 - 1 = 1$ .

$$47 - 25 \cdot 1 = 22 \quad (22 < 25) \text{ Restul este 22 zeci.}$$

Deci 1 este prima cifră (de la stînga spre dreapta) a cîțului.

3°. La restul obținut se adaugă cifra următoare a deîmpărțitului și continuăm împărțirea în același mod.

În cazul nostru:  $225 : 25$  Obținem 9;  $9 \cdot 25 = 225$

$$225 - 9 \cdot 25 = 0 \quad \text{Deci trecem 9 la cîț.}$$

Practico împărțirea se efectuează astfel:

$$\begin{array}{r} 475 \overline{) 25} \\ 225 \overline{) 19} \\ \hline \end{array}$$

Despărțim de la stînga spre dreapta două cifre la deîmpărțit,  $47 : 25$   
 Obținem 1.  $25 \cdot 1 = 25$   
 $47 - 25 = 22$ . Coborîm cifra următoare la rest  
 $225 : 25$  Obținem 9;  $9 \cdot 25 = 225$

Proba.  $25 \cdot 19 = 475$ .

$$\begin{array}{r} 125327 \overline{) 325} \\ 2782 \overline{) 385} \\ \hline 1827 \\ \hline = 202 \end{array}$$

$125 < 325$ . Despărțim deci 4 cifre  
 $1253 : 325$  ( $12 : 3 = 4$ )  
 Încercăm cu 4;  $325 \cdot 4 = 1400 > 1253$ .  
 Încercăm cu 3;  $325 \cdot 3 = 975 < 1253$   $1253 - 975 = 278$  ( $278 < 325$ ).  
 Deci 3 este prima cifră a cîtului și rămîne un rest de 278 mii.  
 Coborîm cifra următoare și continuăm împărțirea  $2782 : 325$ .

Proba:

$$385 \cdot 325 + 202 = 125125 + 202 = 125327.$$

### Împărțirea numerelor zecimale

a) Împărțitorul număr întreg

1°)  $A = 14,6 : 2 = (14 + 0,6) : 2$

$$A = 14 : 2 + 0,6 : 2. \text{ Împărțirea unei sume la un număr}$$

$$A = 7 + 0,3 = 7,3$$

2°)  $A = 14,4 : 3 = (14 + 0,4) : 3$

$$A = 14,4 : 3 = 4,8$$

$$14 : 3 \text{ (rest 2 unități)}$$

$$2u = 20 \text{ zecimi}$$

$$24 \text{ zecimi} : 3 = 8 \text{ zecimi.}$$

Pentru a împărți un număr zecimal la un număr întreg procedăm ca la împărțirea numerelor întregi dar, cînd ajungem la partea zecimală, punem virgula la cît.

b) Împărțitorul număr zecimal

1°)  $A = 6 : 0,2$

$$A = 60 : 2 = 30$$

Transformăm împărțitorul în număr întreg. Cîtul nu se schimbă dacă înmulțim ambii termeni ai împărțirii cu același număr dar restul se mărește de acel număr de ori.

2°)  $A = 3,6 : 1,2$

$$A = 36 : 12 = 3$$

3°)  $A = 3,12 : 1,025$

$$A = 3120 : 1025$$

$$3120 : 1025 = 3 \text{ (rest$$

$$45; \text{ deci } 45 \text{ miimi})$$

Împărțitorul devine număr întreg dacă îl mărim de 1000 ori.

Înmulțim ambii termeni ai împărțirii cu 1000 cîtul rămîne același, restul se mărește de 1000 ori.



*Regulă. Pentru a împărți două numere zecimale, înmulțim ambii termeni cu o putere a lui 10, astfel încât împărțitorul să devină număr întreg.*

*Exemple. 1)  $A = 52 : 0,72$ .*

Transformăm împărțitorul în număr întreg  $0,72 \cdot 100 = 72$ . Înmulțim ambii termeni cu  $10^2$ .

$$A = 5200 : 72 = 70 \text{ (rest 16, deci 16 sutimi)}$$

$$\begin{array}{r|l} 5200 & 72 \\ \underline{160} & 72 \\ 16 & \end{array}$$

$$\text{Proba. } 0,72 \cdot 72 + 0,16 = 52.$$

Restul s-a mărit de 100 ori deci trebuie micșorat de 100 ori.

$$2) A = 1,53 : 1,2.$$

Transformăm împărțitorul în număr întreg, înmulțind ambii termeni cu 10.

$$15,3 : 12 = 1,2 \text{ (rest 9 zecimi)}$$

$$A = 1,53 : 1,2 = 1,2 \text{ (rest 9 sutimi)}$$

$$\text{Proba: } 1,2 \cdot 1,2 + 0,09 = 1,44 + 0,09 = 1,53.$$

$$\begin{array}{r|l} 15,3 & 12 \\ \underline{33} & 1,2 \\ 9 & \end{array}$$

Am obținut restul 9 zecimi deci la împărțirea dată, 9 sutimi.

*Observare. Împărțirea se putea continua pentru a afla câtul exact (dacă există) sau cu o aproximație mai bună*

$$A = 1,53 : 1,2 = 1,275.$$

$$\begin{array}{r|l} 15,3 & 12 \\ \underline{33} & 1,275 \\ 90 & \\ \underline{60} & \\ == & \end{array}$$

$$\text{Proba. } 1,275 \cdot 1,2 = 1,53.$$

$$\begin{array}{r} 1,275 \times \\ 1,2 \\ \hline 2550 \\ 1275 \\ \hline 1,5300 \end{array}$$

*Împărțirea unui polinom  $D$  la un polinom  $I$  este operația prin care obținem o pereche de polinoame  $C$  și  $R$  care îndeplinesc condiția  $D = I \cdot C + R$  în așa fel ca  $R$  să aibă gradul mai mic ca  $I$ . Dacă  $R = 0$  împărțirea se face exact.*

Gradul câtului este egal cu gradul deîmpărțitului minus gradul împărțitorului. Să considerăm împărțirea:

$$(8x^5 - 18x^4 + 28x^3 - 23x^2 - 4x - 1) : (2x^2 - 2x + 3).$$

Cîtul împărțirii va fi un polinom de gradul  $5 - 2 = 3$  adică de forma  $C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  iar restul un polinom cel mult de gradul 1 adică de forma  $R(x) = mx + n$ .

Trebuie să determinăm coeficienții  $a, b, c, d, m, n$ . Vom face aceasta pornind de la definiția împărțirii.

$$8x^5 - 18x^4 + 28x^3 - 23x^2 - 4x - 1 = (2x^2 - 2x + 3)(ax^3 + bx^2 + cx + d) + mx + n. \quad (1)$$

Coeficientul lui  $x^4$  din partea întâi a egalității este egal cu coeficientul lui  $x^4$  din partea a doua; acesta provine din înmulțirea  $2 \cdot a$  și trebuie să fie egal cu 8 deci

$$2a = 8; \quad a = 4.$$

$$8x^4 = 2x^2 \cdot 4x^2 \quad \text{sau} \quad 4x^2 = 8x^4 : 2x^2.$$

Deci primul termen al cîtului se obține prin împărțirea primului termen al deîmpărțitului la primul termen al împărțitorului.

Înlocuind pe  $a$  cu 4 egalitatea (1) devine

$$8x^5 - 18x^4 + 28x^3 - 23x^2 - 4x - 1 = (2x^2 - 2x + 3)(4x^3 + bx^2 + cx + d) + mx + n \quad (2)$$

sau efectuînd înmulțirea cu  $4x^3$ :

$$8x^5 - 18x^4 + 28x^3 - 23x^2 - 4x - 1 = (8x^5 - 8x^4 + 12x^3) + (2x^2 - 2x + 3)(bx^2 + cx + d) + mx + n$$

iar dacă suprimăm termenii primei paranteze din partea a doua și adunăm în prima parte opușii lor obținem:

$$8x^5 - 18x^4 + 28x^3 - 23x^2 - 4x - 1 - 8x^5 + 8x^4 - 12x^3 = (2x^2 - 2x + 3)(bx^2 + cx + d) + mx + n.$$

Se reduc termenii asemenea și obținem

$$-10x^4 + 16x^3 - 23x^2 - 4x - 1 = (2x^2 - 2x + 3)(bx^2 + cx + d) + mx + n.$$

În mod analog se determină  $b$ ;  $-10 = 2 \cdot b$ , deci  $b = -5$  și obținem  $-10x^4 + 16x^3 - 23x^2 - 4x - 1 = (2x^2 - 2x + 3)(-5x^2 + cx + d) + mx + n$ .

Urmînd aceeași cale obținem  $c = 3$ ,  $d = -1$ ;  $m = -15$  și  $n = 2$ .

În practică calculele se așază în felul următor;

Deîmpărțitul	Împărțitorul
— — — — —	Cîtul
— — — — —	
Restul	

$$\begin{array}{r|l}
 8x^5 - 18x^4 + 28x^3 - 23x^2 - 4x - 1 & 2x^2 - 2x + 3 \\
 - 8x^5 + 8x^4 - 12x^3 & 4x^3 - 5x^2 + 3x - 1 \\
 \hline
 - 10x^4 + 16x^3 - 23x^2 & \\
 10x^4 - 10x^3 + 15x^2 & \\
 \hline
 6x^3 - 8x^2 - 4x - 1 & \\
 - 6x^3 + 6x^2 - 9x & \\
 \hline
 - 2x^2 - 13x - 1 & \\
 + 2x^2 - 2x + 3 & \\
 \hline
 - 15x + 2 & 
 \end{array}$$

Împărțim primul termen al deîmpărțitului la primul termen al împărțitorului  $8x^5 : 2x^2 = 4x^3$ ;  $4x^3$  este primul termen al cîtului. Cu  $4x^3$  înmulțim termenii împărțitorului și rezultatele le scădem din termenii corespunzători ai deîmpărțitului. Continuăm împărțirea; împărțim restul obținut la împărțitor deci pe  $-10x^4$  îl împărțim la  $2x^2$  și obținem cîtul  $5x^2$ , care este al doilea termen al cîtului. Cu  $-5x^2$  înmulțim termenii cîtului și-i scădem din restul parțial  $-10x^4 + 16x^3 - 23x^2$  obținînd rezultatul  $6x^3 - 8x^2$  la care mai adăugăm din deîmpărțit pe  $-4x - 1$ .

Al treilea termen al cîtului este obținut prin împărțirea lui  $6x^3$  la  $2x^2$ ; ( $6x^3 : 2x^2 = 3x$ ). Înmulțim cu  $3x$  termenii împărțitorului și rezultatele le scădem din al doilea rest parțial.

Al patrulea și ultimul termen al cîtului rezultă din împărțirea  $-2x^2 : 2x^2 = -1$ . Înmulțim termenii cîtului cu  $-1$  și-i scădem din al treilea rest parțial. Al patrulea rest parțial este restul împărțirii deoarece fiind de gradul întîi — mai mic decît gradul împărțitorului, împărțirea nu mai poate continua.

Proba împărțirii se face prin înmulțire

$$(4x^3 - 5x^2 + 3x - 1)(2x^2 - 2x + 3) + (-15x + 2) = 8x^5 - 18x^4 + 28x^3 - 23x^2 - 4x - 1.$$

Dacă restul este 0 zicem că împărțirea s-a făcut exact.

*Exemple:*

$$\begin{array}{r|l}
 1) \quad x^4 + x^3y - xy^3 - y^4 & x^2 - y^2 \\
 - x^4 & + x^2y^2 \\
 \hline
 / \quad x^3y + x^2y^2 - xy^3 & \\
 - x^3y & + xy^3 \\
 \hline
 / \quad x^2y^2 - y^4 & \\
 - x^2y^2 + y^4 & \\
 \hline
 / \quad / & 
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Proba: } (x^2 + xy + y^2)(x^2 - y^2) &= x^4 + x^3y + x^2y^2 - x^2y^2 - xy^3 - y^4 = \\
 &= x^4 + x^3y - xy^3 - y^4
 \end{aligned}$$





Descompunem în factori:

$$E = \frac{\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) \cdot 15y \cdot \frac{1}{3}x}{5xy \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x\right)}.$$

Simplificăm fracția cu  $5xy \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)$   
 $\left(x \neq 0, y \neq 0, \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \neq 0, \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \neq 0\right).$

$$E = \frac{1}{-1} \quad \cdot \quad E = -1$$

### Împărțirea fracțiilor algebrice

Pentru a împărți două fracții algebrice înmulțim prima fracție cu inversa celei de-a doua:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} \quad \left(\frac{C}{D} \neq 0\right).$$

Exemple.

$$1) E = \frac{27x^3 - 1}{27x^3 + 1} : \frac{9x^2 + 3x + 1}{9x^2 - 3x + 1},$$

$$E = \frac{27x^3 - 1}{27x^3 + 1} \cdot \frac{9x^2 - 3x + 1}{9x^2 + 3x + 1}.$$

Descompunem în factori

$$E = \frac{(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)}{(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)(9x^2 + 3x + 1)}.$$

Simplificăm cu  $(9x^2 + 3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) \neq 0$ .

$$E = \frac{3x - 1}{3x + 1} \quad (3x + 1 \neq 0).$$

Observare. Exercițiul se putea efectua direct observând că

$$27x^3 - 1 = (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1),$$

$$27x^3 + 1 = (3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$$

și efectuând împărțirea fracțiilor împărțind numărătorii între ei și numitorii între ei.

$$E = \frac{(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) : (9x^2 + 3x + 1)}{(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) : (9x^2 - 3x + 1)} = \frac{3x - 1}{3x + 1}.$$

Pentru a împărți un produs cu un număr este suficient să împărțim un factor al produsului cu acel număr.

$$2) E = \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 2}{5x + 5} : \frac{2x^3 + 4x + 2}{5} \quad \cdot \quad (x + 1 \neq 0).$$

Descompunem în factori și înmulțim prima fracție cu inversa fracției a doua.

$$E = \frac{2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)}{5(x + 1)} \cdot \frac{2(x^2 + 2x + 1)}{5}.$$

$$E = \frac{2(x + 1)^3}{5(x + 1)} \cdot \frac{5}{2(x + 1)^2} \quad E = 1.$$

Am simplificat cu  $2 \cdot 5 (x + 1)^3 \neq 0$ .

### Ridicarea unei fracții la o putere cu exponent număr întreg pozitiv (natural)

Pentru a ridica o fracție la o putere cu exponent număr natural ridicăm la această putere atât numărătorul cât și numitorul

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^n = \frac{P^n}{Q^n}.$$

$$\text{În adevăr, } \left(\frac{P}{Q}\right)^n = \underbrace{\frac{P}{Q} \cdot \frac{P}{Q} \cdots \frac{P}{Q}}_{n \text{ factori}} = \frac{P \cdot P \cdots P}{Q \cdot Q \cdots Q} = \frac{P^n}{Q^n}.$$

$$\text{Exemple. 1) } \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}; \left(-\frac{5}{2}\right)^3 = -\frac{125}{8}; \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

$$2) \left(\frac{2xy^3}{ab}\right)^3 = \frac{8x^3y^9}{a^3b^3}; \left(-\frac{xy^2}{ab^2}\right)^2 = \frac{x^2y^4}{a^2b^4}; \left(-\frac{x-y}{3xy}\right)^5 = -\frac{(x-y)^5}{3^5x^5y^5} = -\frac{(x-y)^5}{243x^5y^5}.$$

### Extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pozitiv

a) Numărul este întreg pozitiv și este format din două cifre

$$1) \sqrt{81} = 9 \text{ căci } 9^2 = 81.$$

$$2) \sqrt{83} \approx 9 \text{ căci } 81 < 83 < 100 \text{ deci } 9 < \sqrt{83} < 10.$$

83 este cuprins între două pătrate perfecte consecutive 81 și 100 și rădăcina pătrată a lui 83 va fi cuprinsă între  $\sqrt{81}$  și  $\sqrt{100}$ , deci un număr cuprins între 9 și 10. Zicem că 9 este rădăcina pătrată a lui 83 cu aproximație prin lipsă iar 10 este rădăcina pătrată a lui 83 cu aproximație prin adaos (9 este însă mai apropiat de  $\sqrt{83}$ ).

$$3) \sqrt{79} \approx 9, \quad 8^2 < 79 < 9^2, \quad 8 < \sqrt{79} < 9.$$

$\sqrt{79}$  fiind mai apropiat de 81 decât de 64 putem lua rădăcina pătrată prin adaos.

**Observări.** 1) În general dacă un număr natural  $A$  nu este pătrat perfect și  $a$  este rădăcina pătrată a lui  $A$  prin lipsă ( $a^2$  este cel mai mare număr natural pătrat perfect mai mic decât  $A$ ), atunci

$$a^2 < A < (a + 1)^2 \quad \text{și} \quad a < \sqrt{A} < a + 1.$$

În acest caz diferența  $A - a^2$  se numește restul extragerii rădăcinii pătrate.



2) Din  $A < (a + 1)^2$  obținem scăzând din ambii membri  $a^2$ .

$$A - a^2 < (a + 1)^2 - a^2; \quad A - a^2 < 2a + 1.$$

b) Numărul natural are trei sau patru cifre:

$100 < N < 10000$ . Rădăcina pătrată va fi cuprinsă între 10 și 100;  $10 < \sqrt{N} < 100$ . Rădăcina pătrată va fi deci un număr de două cifre.  $\sqrt{N} = 10z + u$  ( $z$  și  $u$  fiind respectiv cifra zecilor și a unităților).

Dacă extragerea se face exact  $N = (10z + u)^2$ ; dacă extragerea nu se face exact  $N \approx (10z + u)^2$  sau  $(10z + u)^2 < N < (10z + u + 1)^2$ .

*Exemple.*

$$\sqrt{6400} = 10z + u \text{ sau } 64 \cdot 100 = 100 z^2 + 2 \cdot 10z \cdot u + u^2.$$

Cifra zecilor  $z$  se află extrăgând rădăcina pătrată din numărul sutelor  $\sqrt{64} = 8$ ,  $64 \cdot 100 = 64 \cdot 100 + 160 u + u^2$ .

$$\text{deci } u = 0; \quad \sqrt{6400} = 80.$$

$$2) \sqrt{6561} \approx 10z + u.$$

$$65 \cdot 100 + 61 \approx 100z^2 + 2 \cdot 10zu + u^2. \text{ Cifra zecilor este } \sqrt{65} \approx 8.$$

$$6561 \approx 6400 + 20 \cdot 8 \cdot u + u^2; \quad 6561 - 6400 = 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot u + u^2.$$

$161 \approx 20 \cdot 8 \cdot u + u^2$ . Pentru a determina pe  $u$  neglijăm  $u^2$  și obținem o valoare pentru  $u$ .

$$161 \approx 20 \cdot 8 \cdot u, \quad u \approx \frac{161}{160}. \text{ Deci } u = 1$$

$161 \approx 2 \cdot 8 \cdot 10u + u^2$ ; dar  $u = 1$ ,  $161 = 160 + 1$ . Extragerea s-a făcut exact  $\sqrt{6561} = 81$ .

3)  $\sqrt{6342}$  Procedăm în mod analog.

$$\begin{array}{r} 63'42 \\ \sqrt{63} \approx 7 \end{array}$$

1) Despărțim de la dreapta la stînga o grupă de 2 cifre. Extragem rădăcina pătrată din numărul sutelor.

$$6342 = 100 z^2 + 2 \cdot 10zu + u^2$$

2) Ridicăm 7 la pătrat și rezultatul îl scădem din 63 la rezultat alăturăm grupa următoare (42)  $[6342 - 4900 = 1442]$ .

3) Despărțim o cifră la rest de la dreapta spre stînga și vedem de cîte ori dublul cifrei zecilor se cuprinde în numărul rămas  $(1442 \approx 2 \cdot 10 \cdot 7u + u^2)$   $(1442 \approx 2 \cdot 10 \cdot 7u)$  și obținem cifra unităților  $u \approx \frac{144}{14} \approx 9$ .

4) Alăturăm numărului format de dublul cifrei zecilor cifra unităților (9) și numărul format îl înmulțim cu 9 și produsul îl scădem din rest (1442).

$$\begin{array}{r} 63 - 49 = 14 \\ 144 : (2 \cdot 7) \approx 9 \\ 149 \times 9 = 1341 \\ 1442 - 1341 = 101 \\ \sqrt{6342} \approx 79 \\ (\text{restul } 101) \end{array}$$

Practic calculele se așază astfel:

$$\begin{array}{r} \sqrt{6342} \quad 79 \\ 1442 \quad 149 \cdot 9 \\ \hline = 101 \end{array}$$

Proba

$$79^2 + 101 = 6342.$$

b) Numărul întreg pozitiv este format din mai multe cifre

$$\begin{array}{r} \sqrt{2'28'01} \quad 151 \\ 12'8 \quad 25 \cdot 5 = 125 \\ 30'1 \quad 301 \cdot 1 = 301 \\ \hline \end{array}$$

Proba.

$$\begin{array}{r} 151 \times \\ 151 \\ \hline 151 \\ 755 \\ 151 \\ \hline 22801 \end{array}$$

- 1) Despărțim numărul de la dreapta la stînga în grupe de cîte două cifre ultima grupă putînd să aibă o singură cifră 2'28'01.
- 2) Prima cifră a rădăcinii pătrate va fi dată de rădăcina pătrată exactă sau cu aproximație prin lipsă din ultima grupă:  $\sqrt{2} \approx 1$ . Scriem 1 la dreapta numărului deasupra liniei orizontale. Rădăcina pătrată a ultimei grupe o ridicăm la pătrat și rezultatul îl scădem din grupa respectivă

$$1^2 = 1, \quad 2 - 1 = 1.$$

- 3) La restul obținut coborîm grupa următoare (28) și despărțim la numărul obținut o cifră de la dreapta la stînga. Sub linia orizontală trecem dublul rădăcinei aflate 1·2 și alăturăm cîtul împărțirii grupei rămase la rest prin acest număr, iar numărul obținut îl înmulțim cu acest cît.

Dacă produsul obținut este mai mare decît restul atunci micșorăm cîtul aflat cu o unitate și repetăm operațiile. Dacă produsul este mai mic decît restul acest număr (cîtul - 1) este a doua cifră a rădăcinii.

În cazul nostru,

$$12 : 2 = 6,$$

$$26 \cdot 6 = 156 > 128.$$

Scădem o unitate la cîtul obținut

$$25 \cdot 5 = 125 < 128.$$

Deci 5 este a doua cifră a rădăcinii.

- 4) Pentru a afla a treia cifră procedăm în mod analog  
Dublăm rădăcina aflată

$$15 \cdot 2 = 30.$$

Coborîm la rest (3) grupa următoare (01) și obținem 301. Despărțim o cifră de la dreapta spre stînga 30·1.

$$30 : 30 = 1,$$

$$301 \cdot 1 = 301.$$

Dacă 1 este ultima cifră a rădăcinii (de la stînga la dreapta),

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{37'12'35} & 609 \\ \hline 11235 & 1209 \cdot 9 \\ \hline =354 & \end{array} , \quad \sqrt{37} \approx 6 , \quad 6^2 = 36.$$

$$6 \cdot 2 = 12 , \quad 11 : 12 = 0, \dots$$

adăugăm 0 la dreapta lui 6.

Coborîm grupa următoare

$$60 \cdot 2 = 120,$$

$$1123 : 120 \approx 9,$$

$$1209 \cdot 9 = 10881 < 11235;$$

9 este ultima cifră a rădăcinii.

Proba.

$$609^2 = 370881,$$

$$370881 + 354 = 371235.$$

Dacă rădăcina nu se extrage exact atunci numărul este egal cu pătratul rădăcinii aproximative prin lipsă plus restul.

*Extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pozitiv*

c) Numărul este zecimal.

La extragerea rădăcinii dintr-un număr zecimal procedăm la fel ca în cazul numerelor naturale avînd grijă ca la partea zecimală să avem un număr par de cifre (cînd împărțim în grupe virgula desparte două grupe).

$$\begin{array}{r|l} \text{Exemple. } \sqrt{1,21} & 1,1 \\ \hline =21 & 21 \cdot 1 = 21 \\ \hline = & \end{array}$$

Cînd am coborît grupa formată de zecimi și sutimi punem virgula la rezultat.

Putem extrage rădăcina fără să ținem seama de virgulă apoi să despărțim la rezultat atîtea cifre la partea întregă cîte grupe a avut partea întregă a numărului ( $\sqrt{121} = 11$ ). La numărul 1,21 avem o grupă la partea întregă deci vom avea o cifră la partea întregă a rezultatului  $\sqrt{1,21} = 1,1$ .

$$2) \sqrt{12,1} .$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{12,10} & 3,4 \\ \hline 31 \cdot 0 & 64 \cdot 4 = 256 \\ \hline 25 \ 6 & \\ \hline =54 & \end{array}$$

La partea zecimală avem o singură cifră adăugăm [un zero pentru a completa grupa  $\sqrt{12} \approx 3, \quad 3^2 = 9, \quad 31 : 6 \approx 5,$

$$65 \cdot 5 = 325 > 310,$$

$$64 \cdot 4 = 256 < 310.$$

Numărul 12,10 are o grupă la partea întregă deci vom avea o cifră la partea întregă a rădăcinii.

Proba.

$$3,4 \cdot 3,4 = 11,56, \text{ restul } 54 \text{ sutimi}$$

$$11,56 + 0,54 = 12,10.$$



*Observare.* Dacă vrem să găsim rădăcina cu aproximație de o sutime continuăm calculul coborînd lîngă 54 două zerouri (grupa următoare).

### Rădăcina pătrată dintr-o fracție

Pentru a extrage rădăcina pătrată dintr-o fracție putem proceda în două moduri.

1. Extragem rădăcina pătrată din numărător și din numitor  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ . Acest procedeu este convenabil cînd unul cel puțin din termenii fracției este pătrat perfect.

*Exemple.*  $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ ;  $\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx \frac{2,2}{3}$ .

Dacă nici unul din termeni nu este pătrat perfect, putem face noi ca numitorul sau numărătorul să fie pătrat perfect prin amplificarea fracției.

*Exemplu.*  $\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

2. Transformăm fracția ordinară în număr zecimal și extragem rădăcina din rezultat

1)  $\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{1,50} \approx 1,2$ ;  $\sqrt{1,50}$

1,2
22 · 2 = 44
50
6

2)  $\sqrt{\frac{175}{32}} \approx \sqrt{5,4687}$  ;

175	32
150	5,4687
220	
280	
240	
16	

$\sqrt{5,46 \cdot 87}$	2,33
14 · 6	43 · 3 = 129
1787	
398	463 · 3 = 1389

Probă.  $2,33^2 + 0,0398 = 5,4289 + 0,0398 = 5,4687$ .

Este util să reținem rădăcini aproximative mai des întîlnite în practică

$\sqrt{2} \approx 1,414$ ;  $\sqrt{3} \approx 1,73$  ;  $\sqrt{2}$

1,414	
10,0	24 · 4 = 96
400	
11900	281 · 1 = 281
604	284 · 4 = 11296

$\sqrt{3}$

1,73	
200	27 · 7 = 189
1100	343 · 3 = 1029
71	

## Aplicații

### 1. Extragerea rădăcinii dintr-un produs

$$\sqrt{2 \cdot 9 \cdot 16} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = \sqrt{2} \cdot 3 \cdot 4 = 12 \sqrt{2} \approx 12 \cdot 1,41 = 16,92.$$

Am extras radicalul din fiecare factor.

Extrăgând rădăcina pătrată din produs obținem:

$$\sqrt{2 \cdot 9 \cdot 16} = \sqrt{288}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{288} & 16,97 \\ 18.8 & 26.6 = 156 \\ \hline = 320.0 & 329.9 = 2961 \\ \hline = 2390.0 & \\ \hline = 191 & 3387.7 = 23709 \end{array}$$

Pentru a scoate zecimale considerăm că numărul are, la partea zecimală, atâtea grupe de câte două zerouri cît ne sînt necesare.

*Observare.* Dacă luăm  $\sqrt{2} \approx 1,414$ , obținem un rezultat apropiat mai mult de 16,97. În adevăr,  $1,414 \cdot 12 = 16,968$ .

Prima metodă este mai avantajoasă cînd există și factori pătrate perfecte căci se fac calcule mult mai simple.

### 2. Extragerea rădăcinii cu aproximație dată

Să calculăm  $\sqrt{173}$  cu aproximație prin lipsă de  $\frac{1}{100}$  (cu două zecimale) și apoi cu aproximație prin adaos de  $\frac{1}{100}$ .

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{173} & 13,15 \\ = 7.3 & 23.3 = 69 \\ \hline -400 & 261.1 \\ \hline 1390.0 & 2625.5 = 13125 \\ \hline -775 & \end{array}$$

Proba:  $13,15^2 + 0,0775 = 172,9225 + 0,0775 = 173$

cu aproximație prin adaos  $\sqrt{173} \approx 13,16$

### 3. Extragerea rădăcinii pătrate dintr-o fracție

Să se calculeze  $\sqrt{\frac{37}{3}}$

$$\text{a) } \sqrt{\frac{37}{3}} = \frac{\sqrt{37}}{\sqrt{3}} \approx \frac{6,08}{1,73} \approx 3,5, \quad \begin{array}{r|l} \sqrt{37} & 6,08 \\ \hline 120.8 & 9664 \\ \hline 10000 & \\ \hline = 336 & \end{array}$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{37}{3}} = \sqrt{\frac{37 \cdot 3}{9}} = \frac{\sqrt{111}}{3} \approx \frac{10,5}{3} = 3,5, \quad \begin{array}{r|l} \sqrt{1.11} & 10,5 \\ \hline 1.100 & 205.5 \\ \hline 75 & \end{array}$$

$$\text{c) } \sqrt{\frac{37}{3}} \approx \sqrt{12,33} \approx 3,5, \quad \begin{array}{r|l} \sqrt{12,33} & 3,5 \\ \hline 33.3 & 65.5 = 325 \\ \hline = 8 & \end{array}$$

Al doilea procedeu a condus la calcule mai simple.

*Observări.*

1) Dacă avem o sumă de numere iraționale (de exemplu de rădăcini pătrate din numere care nu sînt pătrate perfecte) putem calcula suma cu aproximație prin lipsă sau prin adaos.

*Exemple.* 1)  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 1,41 + 1,73 = 3,14$

și  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 1,42 + 1,74 = 3,16,$

$$3,14 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,16.$$

2)  $\pi + \sqrt{2} \approx 3,14 + 1,41 = 4,55, \pi + \sqrt{2} \approx 3,15 + 1,42 = 4,57, 4,55 < \pi + \sqrt{2} < 4,57.$

2) Dacă într-o sumă există mai mulți termeni care cuprind rădăcina pătrată a aceluiași număr (același număr irațional), putem strînge acești termeni aplicînd proprietățile operațiilor (comutativitate, asociativitate, distributivitatea înmulțirii față de adunare) care se aplică și în cazul operațiilor cu numere iraționale.

*Exemple.*  $\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{5} = (\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) + (3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}) =$   
 $= \sqrt{2}(1 - 2) + \sqrt{5}(3 + 2) = -\sqrt{2} + 5\sqrt{5} \approx -1,41 + 5 \cdot 2,23,$   
 $\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{5} \approx -1,41 + 11,15 = 9,74.$

3) Dacă avem o fracție cu numitorul rădăcina pătrată dintr-un număr real putem transforma fracția într-o fracție echivalentă cu numitorul număr rațional amplificînd fracția cu acea rădăcină pătrată.

*Exemple.*  $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$   
 $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}; \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$

4) În practică dacă rădăcinile pătrate nu se extrag exact ele se înlocuiesc cu valorile lor aproximative în rezultatul final. În același fel procedăm cînd în calcule intervin și alte numere iraționale.

*Exemple.*

1) Să se calculeze valoarea numerică a expresiei

$$V = \frac{1}{3} [\pi I \cdot R^2 + \pi I r^2 + \pi I R r].$$

Pentru  $I = 2, \quad R = 4, \quad r = 1,$

$$V = \frac{\pi I}{3} (R^2 + r^2 + Rr),$$

$$V = \frac{\pi \cdot 2}{3} (16 + 1 + 4) = \frac{2 \cdot 21 \cdot \pi}{3} = 14\pi,$$

$$V \approx 14 \cdot 3,14; \quad V \approx 43,96.$$



2) Să se calculeze:

$$E = 5\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

$$E = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ am înlocuit fracțiunile } \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ și } \frac{5}{\sqrt{2}} \text{ cu } \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ și } \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

(fracții echivalente cu numitorii numere raționale).

$$E = 5\sqrt{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} + \left(2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{15\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$E \approx \frac{15 \cdot 1,41}{2} + \frac{4 \cdot 1,73}{3} = \frac{21,15}{2} + \frac{6,92}{3},$$

$$E \approx 10,575 + 2,30 = 12,875.$$

## Exerciții.

### Operații cu numere raționale și cu fracții algebrice

Ordinea operațiilor și folosirea parantezelor se face după regulile stabilite la operațiile cu numere întregi.

$$1. E = 5 \cdot 6 - 8 : 2 + 3^2 + 4^2 \cdot 5 - 20 + 60 : 15.$$

Avem o sumă algebrică de mai mulți termeni numere sau produse de numere. Calculăm termenii sumei; efectuăm mai întâi operațiile de ordinul III.

$$E = 5 \cdot 6 - 8 : 2 + 9 + 16 \cdot 5 - 20 + 60 : 15.$$

Efectuăm operațiile de ordinul II.

$$E = 30 - 4 + 9 + 80 - 20 + 4; E = 99.$$

*Observare.* Practic, când e posibil, efectuăm în același timp cu operațiile de ordinul III și unele operații de ordinul II (cele care se fac între numere date).

$$2. E = 2^3 : 2^2 + 30 - \sqrt{0,25} + 20 - 60 : 30 + 4 \cdot 5.$$

Aici putem efectua operațiile de ordinul III și II în același timp ( $2^3 : 2^2 = 2$ ).

$$E = 2 + 30 - 0,5 + 20 - 2 + 20,$$

$$E = 69,5.$$

$$3. E = \underbrace{\left[ (5 \cdot 8 - 4) \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 2 \right] : 6 + 5}_A \cdot 7 - \underbrace{\left[ (3 + 2^2) \cdot \frac{4}{7} - 4 \right]}_B.$$

Avem de efectuat o diferență (ultima operație este o diferență) dintre un produs  $A \cdot 7$  și o diferență  $B$ .  $A$  este o sumă de două produse iar  $B$  diferența dintre un produs și un număr.

Pentru a calcula pe  $A$  calculăm termenii sumei. Primul termen este cîtu unei sume cu un număr. Pentru a-l calcula pe  $B$ , trebuie să calculăm mai întîi  $2^2$  apoi suma  $(3 + 2^2)$ .

$$E = \left[ \left[ (40 - 4) \cdot \frac{1}{2} + 6 \right] : 6 + 5 \right] \cdot 7 - \left[ (3 + 4) \cdot \frac{4}{7} - 4 \right].$$

Am efectuat operațiile de ordinul II respectiv III din parantezele mici. Efectuăm calculele din parantezele mici transformînd parantezele în mod corespunzător.

$$E = \left[ \left[ 36 \cdot \frac{1}{2} + 6 \right] : 6 + 5 \right] \cdot 7 - \left( 7 \cdot \frac{4}{7} - 4 \right).$$

Efectuăm operațiile din parantezele mici

$$E = [(18 + 6) : 6 + 5] \cdot 7 - (4 - 4); E = (24 : 6 + 5) \cdot 7; E = (4 + 5) \cdot 7; E = 63.$$

$$4. E = 14 \frac{1}{9} - \underbrace{\left\{ 2 \frac{1}{3} - \left[ 2 \frac{7}{90} - \left( 1 \frac{1}{3} - \frac{7}{45} \right) + 6 \frac{1}{2} \right] + 12 \frac{1}{4} \right\}}_A.$$

Avem de efectuat o diferență  $14 \frac{1}{9} - A$ ;

$A$  este o sumă algebrică de trei termeni dintre care unul este și el o sumă. Calculăm acest termen; efectuăm calculele din paranteza mică transformînd parantezele

$$E = 14 \frac{1}{9} - \left[ 2 \frac{1}{3} - \left( 2 \frac{7}{90} - 1 \frac{8}{45} + 6 \frac{1}{2} \right) + 12 \frac{1}{4} \right].$$

Avem o diferență între un număr și o sumă algebrică. Calculăm suma efectuînd mai întîi calculele din paranteza mică și transformăm parantezele:

$$E = 14 \frac{1}{9} - \left( 2 \frac{1}{3} - 7 \frac{7 - 16 + 45}{90} + 12 \frac{1}{4} \right)$$

$$E = 14 \frac{1}{9} - \left( 2 \overset{60)}{\frac{1}{3}} - 7 \overset{2)}{\frac{36}{90}} + 12 \overset{45)}{\frac{1}{4}} \right).$$

$$E = 14 \frac{1}{9} - \left( 14 \frac{105}{180} - 7 \frac{72}{180} \right).$$

$$E = 14 \frac{1}{9} - 7 \frac{33}{180}. \text{ Introducem un întreg în fracția de la descăzut}$$

$$E = 13 \frac{200}{180} - 7 \frac{33}{180}; E = 6 \frac{167}{180}.$$

$$5. E = \frac{\left[ \left( 0,14 : \frac{2}{5} - 0,42 \cdot \frac{1}{2} \right) \right] \cdot \left[ \left( 5,74 + 12,78 \right) : \left( 1,344 + 2 \frac{9}{25} \right) \right]}{\left[ \left( 0,7835 + 3,6949 \right) - \left( 2 \frac{3}{4} + 1,146 \right) \right] : \left[ \left( 3 - \frac{9}{50} \right) + \left( 9 \frac{1}{20} - 3,55 \right) \right]}.$$

La numărător avem de efectuat o înmulțire și o împărțire a unor sume. Vom calcula aceste sume. La numitor avem o împărțire a două sume pe care trebuie să le efectuăm.

Fracțiile ordinare care figurează au ca numitori numere de forma  $2^x$ ,  $5^y$  deci putem lucra cu numere zecimale. Efectuăm calculele din parantezele mici.

$$E = \frac{[(0,14 : 0,4 - 0,21)] \cdot [18,52 : (1,344 + 2,36)]}{[4,4784 - (2,75 + 1,146)] : [(3 - 0,18) + (9,05 - 3,55)]} = \frac{(0,35 - 0,21) (18,52 : 3,704)}{0,5824 : (2,82 + 5,50)};$$

$$E = \frac{0,14 \cdot 5}{0,5824 : 8,32} ; \quad E = \frac{0,7}{0,07} ; \quad E = 10.$$

$$6. E = \frac{6 \frac{5}{6} \cdot 6 - 16}{9 - 6 \frac{2}{9}} : \frac{0,83}{1 + \frac{33}{50}} + \frac{8}{1 : 2,25}.$$

Avem de efectuat o sumă dintre un cit de două fracții și o fracție. Calculăm termenii sumei. Vom lucra cu numere zecimale în cazul în care fracțiile sînt zecimale ( $1 \frac{33}{50} = 1,66$ ).

$$E = \frac{\frac{41}{6} \cdot 6 - 16}{8 \frac{9}{9} - 6 \frac{2}{9}} : \frac{0,83}{1,66} + \frac{8}{\frac{100}{225}};$$

$$E = \frac{41 - 16}{2 \frac{7}{9}} \cdot \frac{166}{83} + \frac{225 \cdot 8}{100};$$

$$E = \frac{25}{\frac{25}{9}} \cdot 2 + 18; \quad E = 25 \cdot \frac{9}{25} \cdot 2 + 18; \quad E = 18 + 18; \quad E = 36.$$

$$7. E = \frac{\left(17 \frac{1}{2} - 8,25 \cdot \frac{10}{11}\right) \cdot \left(11 \frac{2}{3} : 2 \frac{2}{9} + 3,5\right)}{\left(1,725 : 2,3 - \frac{3}{7}\right) \cdot \left(14 \frac{2}{3} - 51,2 : 4\right)}.$$

Numărătorul și numitorul sînt produse de două sume algebrice. Calculăm aceste sume (Efectuăm calculele din paranteze).

Transformăm în fracții ordinare

$$E = \frac{\left(17 \frac{1}{2} - \frac{825}{110}\right) \cdot \left(\frac{35}{3} : \frac{20}{9} + 3,5\right)}{\left(0,75 - \frac{3}{7}\right) \cdot \left(14 \frac{2}{3} - 12,8\right)}; \quad \frac{825}{110} = 7 \frac{1}{2};$$



$$E = \frac{\left(17 \frac{1}{2} - 7 \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{35}{3} \cdot \frac{9}{20} + 3 \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{7}\right) \cdot \left(14 \frac{2}{3} - 12 \frac{4}{5}\right)};$$

$$E = \frac{\left(17 \frac{1}{2} - 7 \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{7 \cdot 3}{4} + 3 \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3 \cdot 7 - 3 \cdot 4}{28}\right) \cdot \left(2 \frac{10}{15} - \frac{12}{15}\right)};$$

$$E = \frac{10 \left(\frac{21}{4} + 3,5\right)}{\frac{21 - 12}{28} \cdot \left(1 \frac{25}{15} - \frac{12}{15}\right)}; \quad E = \frac{10(5,25 + 3,5)}{\frac{9}{28} \cdot \frac{13}{15}};$$

$$E = \frac{10 \cdot 8,75}{\frac{9}{28} \cdot \frac{28}{15}} = \frac{87,5}{\frac{3}{5}} = \frac{875}{10 \cdot \frac{3}{5}} = 145 \frac{5}{6}$$

$$8. E = \frac{[(0,20 \cdot 3)^2 + (0,4 \cdot 0,5)^2] \cdot \sqrt{\frac{0, (81)}{0, (49)}}}{\sqrt{0,00001296} + \sqrt{0,0016}}.$$

Numărătorul este un produs format dintr-o sumă și rădăcina pătrată a unui cîț. Numitorul este o sumă a două rădăcini pătrate. La numărător calculăm factorii produsului; la numitor termenii sumei

$$E = \frac{[(0,6)^2 + (0,2)^2] \cdot \sqrt{\frac{81}{99} \cdot \frac{99}{49}}}{0,0036 + 0,04} \quad ; \quad 0, (81) = \frac{81}{99}; \quad 0, (49) = \frac{49}{99}.$$

$$E = \frac{(0,36 + 0,04) \frac{9}{7}}{0,0436}; \quad E = \frac{0,4 \cdot \frac{9}{7}}{0,0436}; \quad E = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{10000}{436}}{\frac{9000}{763}} = 11 \frac{607}{763}$$

$$9. E = \left(\frac{3, (5) - 1,8 (3)}{9, (7) - 6, (4)} : 71\right) : \frac{3,1 \cdot 0,1 (01)}{2, (15)}.$$

Transformăm numerele zecimale periodice în fracții ordinare

$$\frac{3 \frac{5}{9} - 1 \frac{83-8}{90}}{9 \frac{7}{9} - 6 \frac{4}{9}} \cdot \frac{1}{71}; \quad \frac{3,1 \cdot \frac{101-1}{990}}{2 \frac{15}{99}} = \frac{3 \frac{5}{9} - 1 \frac{75}{90}}{3 \frac{3}{9}} \cdot \frac{1}{71}; \quad \frac{3,1 \cdot \frac{100}{990}}{2 \frac{5}{33}}.$$

$$E = \frac{3 \frac{5}{9} - 1 \frac{15}{18}}{3 \frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{71} : \left(\frac{31}{10} \cdot \frac{10}{99} \cdot \frac{33}{71}\right);$$

$$E = \frac{2 \frac{28}{18} - 1 \frac{15}{18}}{\frac{10}{3} \cdot 71} : \frac{31}{3 \cdot 71}; \quad E = 1 \frac{13}{18} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{71} \cdot \frac{3 \cdot 71}{31}; \quad E = \frac{31}{18} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{31} = \frac{1}{20}.$$

$$10. E = \frac{0,004:0,0005}{2,4(23) + 3,(576) + 2,0(001911)} \cdot \frac{2,(7) - 0,45(3) + 4,(5)}{0,54(6) + 0,(7) - 0,02(6)}.$$

Avem de efectuat un produs de două fracții. Calculăm termenii acestei fracții.  
Transformăm în fracții ordinare.

$$E = \frac{40:5}{2 \frac{423-4}{990} + 3 \frac{576}{999} + 2 \frac{1911}{9999990}} \cdot \frac{2 \frac{7}{9} - \frac{453-45}{900} + 4 \frac{5}{9}}{\frac{546-54}{900} + \frac{7}{9} - \frac{26-2}{900}};$$

$$E = \frac{8}{2 \frac{419}{990} + 3 \frac{576}{999} + 2 \frac{1911}{9999990}} \cdot \frac{2 \frac{7}{9} - \frac{408}{900} + 4 \frac{5}{9}}{\frac{492}{900} + \frac{7}{9} - \frac{24}{900}};$$

$$E = \frac{8}{7 + \frac{419 \cdot 10101 + 576 \cdot 10010 + 1911}{9999990}} \cdot \frac{6 \frac{1200-408}{900}}{\frac{468+700}{900}};$$

$$E = \frac{8}{7 + \frac{4232319 + 5765760 + 1911}{9999990}} \cdot \frac{6 \frac{792}{900}}{\frac{1168}{900}};$$

$$E = \frac{8}{7 + \frac{9999990}{9999990}} \cdot \frac{\frac{6192}{900}}{\frac{1168}{900}}; \quad E = \frac{8}{8} \cdot \frac{6192}{1168} = 5 \frac{352}{1168}.$$

Simplificând cu 16,  $E = 5 \frac{22}{73}$ .

$$11. E = 6 : \frac{1}{3} - 0,8 : \frac{1,5}{\frac{3}{2} \cdot 0,4 \cdot \frac{50}{2}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,25}}{6 - \frac{46}{1 + 2,2 \cdot 10}}$$

Aducem mai întâi fracțiile la forma cea mai simplă.

$$E = 18 - 0,8 : \frac{1,5}{\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{50}{2}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{0,5}}{6 - \frac{46}{1+22}}.$$

Simplificăm fracțiile.

$$E = 18 - 0,8 : \frac{1,5}{15} + \frac{1}{4} + \frac{1+2}{6 - \frac{46}{23}}; \quad E = 18 - 0,8 : \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{3}{6-2},$$

$$E = 18 - 8 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}.$$

$$E = 10 + 1; \quad E = 11.$$

$$12. E = \left( \frac{7 \frac{2}{3} - 6 \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{14}}{8 \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} - 1 \frac{1}{6}} + \frac{7}{18} : \frac{14}{27} \right) \left( \frac{5}{6} - 0,75 \right) \cdot \frac{20,4 \cdot 4,8 \cdot 6,5}{22,1 \cdot 1,2},$$

$$E = \left( \frac{7 \frac{2}{3} - \frac{98}{15} \cdot \frac{5}{14}}{\frac{35}{4} \cdot \frac{2}{7} - 1 \frac{1}{6}} + \frac{7}{18} \cdot \frac{27}{14} \right) \left( \frac{5}{6} - \frac{75}{100} \right) \cdot \frac{\frac{204}{10} \cdot \frac{48}{10} \cdot \frac{65}{10}}{\frac{221}{10} \cdot \frac{12}{10}}$$

$$E = \left( \frac{7 \frac{2}{3} - \frac{7}{3}}{\frac{5}{2} - 1 \frac{1}{6}} + \frac{3}{4} \right) \left( \frac{5}{6} - \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{24}{1},$$

$$E = \left( \frac{7 \frac{2}{3} - 2 \frac{1}{3}}{2 \frac{3}{6} - 1 \frac{1}{6}} + \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{10-9}{12} \cdot 24;$$

$$E = \left( \frac{5 \frac{1}{3}}{1 \frac{1}{3}} + \frac{3}{4} \right) \cdot 2 = \frac{19}{2}.$$

13. Să se calculeze:

$$E = \frac{2 : 2 : 2 \left\{ 1 \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \left[ \frac{4,37}{2 \cdot (0,2)^2} - 3,5(6) \left( \sqrt{\frac{2271,049}{10}} - \frac{7}{100} \right) \right] \right\}}{\frac{7}{2} : \frac{3}{5} - \frac{4,2}{2 \frac{1}{7}} \left( 5,4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{23}{10} \right) : 7 - \frac{263}{60}}.$$

Efectuăm operațiile de gradul III și transformăm 3, 5 (6) în fracție ordinară:

$$1^\circ \sqrt{\frac{2271,049}{10}} = \sqrt{227,1049} = 15,07; \quad \frac{\sqrt{227,1049}}{12,7} \cdot \frac{15,07}{25 \cdot 5} = 125$$

$$2^\circ 3,5(6) = 3 \frac{56-5}{90} = 3 \frac{51}{90} = 3 \frac{17}{30}; \quad \frac{21049}{3007 \cdot 7} = 21049$$

$$3^\circ \frac{4,37}{2 \cdot (0,2)^2} = \frac{4,37}{2 \cdot 0,04} = \frac{437}{8} = 54 \frac{5}{8}.$$



$$E = \frac{1 : 2 \left\{ 1 \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \left[ 54 \frac{5}{8} - 3 \frac{17}{30} (15,07 - 0,07) \right] \right\}}{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{3} - \frac{42}{10} \cdot \frac{7}{15} (2,7 + 2,3) \cdot \frac{1}{7} - 4 \frac{23}{60}},$$

$$E = \frac{\frac{1}{2} \left[ 1 \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \left( 54 \frac{5}{8} - \frac{107}{30} \cdot 15 \right) \right]}{\frac{35}{6} - \frac{7}{5} \cdot 5 - 4 \frac{23}{60}},$$

$$E = \frac{\frac{1}{2} \left[ 1 \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \left( 54 \frac{5}{8} - 53 \frac{1}{2} \right) \right]}{5 \frac{5}{6} - 1 \frac{2}{5} - 4 \frac{23}{60}}; \quad E = \frac{\frac{1}{2} \left( 1 \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \cdot 1 \frac{1}{8} \right)}{\frac{50 - 24 - 23}{60}};$$

$$E = \frac{\frac{1}{2} \left( 1 \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} \right)}{\frac{3}{60}}; \quad E = \frac{\frac{1}{2} \left( 1 \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right)}{\frac{1}{20}}; \quad E = \frac{1}{2} \cdot 20; \quad E = 10.$$

$$14. E = \left( x - 3 + \frac{2x}{2x-6} \right) : \left( 2x - 1 + \frac{15}{3x-9} \right),$$

Avem de efectuat o împărțire a două sume algebrice. Efectuăm calculele din paranteză avînd grijă să simplificăm fracțiile cînd este posibil.

$$E = \left( x - 3 + \frac{2x}{2(x-3)} \right) : \left( 2x - 1 + \frac{15}{3(x-3)} \right).$$

Aducem în paranteze la același numitor.

$$E = \frac{(x-3)^2 + x}{x-3} : \frac{(2x-1)(x-3) + 5}{x-3};$$

$$E = \frac{x^2 - 6x + 9 + x}{x-3} : \frac{2x^2 - 6x - x + 3 + 5}{x-3};$$

$$E = \frac{x^2 - 5x + 9}{x-3} \cdot \frac{x-3}{2x^2 - 7x + 8} \quad x-3 \neq 0.$$

$$E = \frac{x^2 - 5x + 9}{2x^2 - 7x + 8}.$$

$$15. E = \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{x^2}{a^2 b^2} \right) (a^2 + b^2 + x^2) : \left( \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} - \frac{x^4}{a^4 b^4} \right).$$

Efectuăm calculele din paranteză aducînd la același numitor.

$$E = \frac{b^2 + a^2 - x^2}{a^2 b^2} \cdot (a^2 + b^2 + x^2) : \frac{b^4 + a^4 + 2a^2 b^2 - x^4}{a^4 b^4}.$$

$$E = \frac{(b^2 + a^2 - x^2) (a^2 + b^2 + x^2) \cdot a^4 \cdot b^4}{a^2 b^2 (b^4 + a^4 + 2a^2 b^2 - x^4)}.$$

Simplificăm fracția cu factorul  $a^2b^2 \neq 0$  și descompunem în factori polinomul  $b^4 + a^4 + 2a^2b^2 - x^4$ . Dar  $(a^4 + b^4 + 2a^2b^2)$  este un pătrat perfect  $(a^2 + b^2)^2$ . Deci  $b^4 + a^4 + 2a^2b^2 - x^4 = (a^2 + b^2)^2 - x^4$  este o diferență de două pătrate:

$$(a^2 + b^2)^2 - x^4 = (a^2 + b^2 + x^2)(a^2 + b^2 - x^2)$$

Punem condiția  $a^2 + b^2 - x^2 \neq 0$  căci  $a^2 + b^2 + x^2 > 0$ .

$$E = \frac{(b^2 + a^2 - x^2)(a^2 + b^2 + x^2)a^2b^2}{(a^2 + b^2 + x^2)(a^2 + b^2 - x^2)} ; \quad E = a^2b^2.$$

16. Să se calculeze:

$$E = \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}\right) \left(1 - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}\right) + \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}\right) \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}\right).$$

(G.M.F., seria B nr. 5/1960)

Avem de efectuat o sumă de două produse. Calculăm sumele din paranteze. Aducem fracțiile din paranteze la forma cea mai simplă

$$E = \left(1 - \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3-1}{6}}\right) \left(1 - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3+1}{6}}\right) + \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3-1}{6}}\right) \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3+1}{6}}\right);$$

$$E = \left(1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{2}\right) \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{4}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{4}\right);$$

$$E = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{9}{4}\right) + \left(1 + \frac{3}{2}\right) \left(1 - \frac{3}{4}\right).$$

Calculăm sumele din paranteze

$$E = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4}.$$

Efectuăm produsele și apoi suma algebrică.

$$E = -\frac{5}{8} + \frac{5}{8}, \quad E = 0.$$

17. Se dă expresia: 
$$E = \frac{1 - \frac{4x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{x^2-1}}$$

și se cere:

a) Să se aducă la forma cea mai simplă;

b) Să se arate că această expresie nu poate avea valoarea numerică egală cu 1 pentru nici o valoare a lui  $x$ ;

(G.M.F., seria B nr. 9/1958)

a) Aducem fracția la forma cea mai simplă aducând la același numitor în ambii termeni ai fracției.

La numitor c.m.m.m.c. =  $(x + 1)(x - 1)$  deoarece  $-\frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1}$ .

$$E = \frac{\frac{x^2 + 2x + 1 - 4x}{(x+1)^2}}{\frac{x^2 - x + x + 1 - 2x}{x^2 - 1}}.$$

Strângem termenii asemenea în ambii termeni ai fracției și efectuăm împărțirea indicată prin linia de fracție

$$E = \frac{x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}, \quad (x+1 \neq 0; x-1 \neq 0).$$

Simplificând fracția cu  $(x+1)(x-1)^2$ ,  $x \neq \pm 1$ ,

$$E = \frac{x-1}{x+1}.$$

$$b) \quad \frac{x-1}{x+1} = 1.$$

Dar  $x-1 \neq x+1$  căci  $-1 \neq 1$ .

$$18. E = \frac{\left(1 - \frac{a}{b} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^3}{a^3}\right) \left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right) \cdot \frac{a+b}{2}}{\left(1 + \frac{3b-a}{a+b}\right) (a^2 - b^2)}.$$

$$E = \frac{\frac{a^3b - a^4 + b^3a - b^4}{a^3b} \cdot \frac{a+b-a+b}{a+b} \cdot \frac{a+b}{2}}{\frac{a+b+3b-a}{a+b} (a-b)(a+b)} \quad (a+b \neq 0).$$

Strângem termenii asemenea.

$$E = \frac{\frac{a^3b - a^4 + ab^3 - b^4}{a^3b} \cdot \frac{2b}{2}}{4b(a-b)} \quad (a \neq 0; b \neq 0; a-b \neq 0).$$

Efectuăm împărțirea indicată de linia de fracție, apoi simplificăm fracția obținută.

Descompunem expresia  $a^3b - a^4 + ab^3 - b^4$  grupând convenabil termenii:

$$a^3b - a^4 + ab^3 - b^4 = a^3(b-a) - b^3(b-a) = (b-a)(a^3 - b^3),$$

$$a^3b - a^4 + ab^3 - b^4 = (b-a)(a-b)(a^2 + ab + b^2) = -(a-b)^2(a^2 + ab + b^2).$$

$$E = \frac{-(a-b)^2(a^2 + ab + b^2)}{a^3} \cdot \frac{1}{4b(a-b)},$$

$$E = \frac{b^2 - a^2}{4a^3b}.$$



$$19. E = \left( \frac{8 + a^3}{x^2 - y^2} : \frac{4 - 2a + a^2}{x - y} \right) : \left( x + \frac{xy + y^2}{x + y} \right).$$

$$E = \frac{(2 + a)(4 - 2a + a^2)}{(x - y)(x + y)} \cdot \frac{x - y}{4 - 2a + a^2} : \left( x + \frac{y(x + y)}{x + y} \right) (x \pm y \neq 0; 2 - a \neq 0).$$

$$E = \frac{2 + a}{x + y} \cdot \frac{1}{x + y}; \quad E = \frac{2 + a}{(x + y)^2}.$$

$$20. E = \frac{a}{(a - c)(a - b)} + \frac{b}{(b - a)(b - c)} + \frac{c}{(c - a)(c - b)}.$$

Aducem la același numitor:  $(a - b)(b - c)(c - a)$ .

$$E = \frac{-a(b - c) - b(c - a) - c(a - b)}{(a - b)(b - c)(c - a)} \quad a \neq b \neq c.$$

Desfacem parantezele.

$$E = \frac{-ab + ac - bc + ab - ac + bc}{(a - b)(b - c)(c - a)}.$$

Stringem termenii asemenea

$$E = \frac{0}{(a - b)(b - c)(c - a)}; \quad E = 0 \quad (a \neq b \neq c).$$

$$21. E = \frac{4a^2}{a^4 + a^3 + a + 1} : \left( \frac{1}{a^2 + 2a + 1} - \frac{2}{a + 1} + \frac{1}{1 - a} + \frac{1}{a^2 - 2a + 1} \right).$$

Avem de efectuat o împărțire a unei fracții cu o sumă. Efectuăm suma din paranteză.  
Numitorul comun:  $(a + 1)^2(a - 1)^2$  și

$$-\frac{2}{(a + 1)} \cdot \frac{1}{1 - a} = \frac{2}{(a + 1)(a - 1)}.$$

$$E = \frac{4a^2}{a^4 + a^3 + a + 1} : \frac{a^2 - 2a + 1 + 2a^2 - 2 + a^2 + 2a + 1}{(a - 1)^2(a + 1)^2} \quad (a \pm 1 \neq 0).$$

Stringem termenii asemenea:

$$E = \frac{4a^2}{a^4 + a^3 + a + 1} : \frac{4a^2}{(a - 1)^2(a + 1)^2}.$$

Împărțim fracțiile apoi simplificăm. Descompunem

$$a^4 + a^3 + a + 1 = a^3(a + 1) + (a + 1) = (a + 1)(a^3 + 1) = (a + 1)^2(a^2 - a + 1).$$

$$E = \frac{4a^2}{(a + 1)^2(a^2 - a + 1)} \cdot \frac{(a - 1)^2(a + 1)^2}{4a^2} \quad (a \neq 0; a + 1 \neq 0);$$

$$E = \frac{(a - 1)^2}{a^2 - a + 1}; \quad E = \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - a + 1}.$$

22. Să se calculeze valoarea numerică a fracției

$$F(x) = \frac{x^3 + (1 - a^2)x - a}{x^3 - a^2x - a^3} \text{ pentru } \begin{cases} 1) x = a \\ 2) x = -a \\ 3) x = 1, a = 2 \\ 4) x = -1, a = -2. \end{cases}$$

$$1) F(a) = \frac{a^3 + (1 - a^2)a - a}{a^3 - a^3 - a^3} ;$$

$$F(a) = \frac{a^3 + a - a^3 - a}{-a^3} ; \quad F(a) = \frac{0}{-a^3} (a \neq 0); \quad F(a) = 0.$$

$$2) F(-a) = \frac{-a^3 + (1 - a^2)(-a) - a}{-a^3 + a^3 + a^3} ;$$

$$F(-a) = \frac{-a^3 - a + a^3 - a}{-a^3} ;$$

$$F(-a) = \frac{2a}{a^3} a \neq 0; \quad F(-a) = \frac{2}{a^2} (a \neq 0).$$

$$3) F(1,2) = \frac{1 + (1 - 4) - 2}{1 - 4 - 8} ;$$

$$F(1,2) = \frac{1 - 3 - 2}{-11} = \frac{-4}{-11} ; \quad F(1,2) = \frac{4}{11}.$$

$$4) F(-1, -2) = \frac{-1 - (1 - 4) + 2}{-1 + 4 + 8} ;$$

$$F(-1, -2) = \frac{-1 + 3 + 2}{11} ;$$

$$F(-1, -2) = \frac{4}{11}.$$

23. Se dau expresiile:

$$A = 4x^2 + (8x^3 - 1) \cdot \left( \frac{2x + 4x^2}{4x^2 - 1} - \frac{2x + 1}{2x - 1} \right),$$

$$B = \left( \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} + \frac{2x^2}{x^3 - x^2 + x - 1} \right) \cdot \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right).$$

1) Să se aducă la forma cea mai simplă.

2) Să se verifice că

$$AB - A + B + 1 = 0.$$

Examen de admitere cl. a IX-a sesiunea iunie 1968—București.

$$1) A = 4x^2 + (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) \left( \frac{2x(1 + 2x)}{(1 + 2x)(2x - 1)} - \frac{2x + 1}{2x - 1} \right).$$

Punând condițiile ca  $2x - 1 \neq 0$  și  $2x + 1 \neq 0$ , simplificăm fracțiile cu acești factori.

$$A = 4x^2 + (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) \frac{2x - 2x - 1}{2x - 1} ;$$

$$A = 4x^2 - 4x^2 - 2x - 1; \quad A = -2x - 1; \quad A = -(2x + 1).$$

$$B = \left( \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} + \frac{2x^2}{x^2(x - 1) + (x - 1)} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2} ;$$

$$B = \left( \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} + \frac{2x^2}{(x-1)(x^2+1)} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2};$$

$$B = \frac{x^3 - 2x^2 + x + 2x^2}{(x-1)(x^2+1)} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{x^2},$$

$x^2 + 1 \neq 0$ . Punem condiția ca :  $x - 1 \neq 0$ .

$$B = \frac{x(x^2 + 1)(x + 1)}{x^2(x^2 + 1)}; \quad B = \frac{x + 1}{x}.$$

$$2) \quad AB - A + B + 1 = 0, \quad A = -(2x + 1); \quad B = \frac{x + 1}{x}.$$

$$-(2x + 1) \cdot \frac{x + 1}{x} + 2x + 1 + \frac{x + 1}{x} + 1 = 0.$$

Punem condiția:  $x \neq 0$ .

$$(-2x) \cdot \frac{x + 1}{x} - \frac{x + 1}{x} + 2x + 1 + \frac{x + 1}{x} + 1;$$

$$-2x - 2 + 2x + 2 = 0$$

*Observare.* Expresia dată  $A$  nu are sens pentru valorile care anulează numitorii  $\left(x = \pm \frac{1}{2}\right)$ , expresia  $B$  dată nu are sens pentru  $x = 0$  și  $x = 1$ , factorul  $1 + x^2$  nu se anulează pentru  $x$  real.

Expresia  $A \cdot B - A + B + 1$  în care  $A$  și  $B$  sînt aduse la forma cea mai simplă, nu mai are la numitor factorii  $(x - 1)$ ,  $(2x + 1)$  și  $(x - 1)$  deci ea este verificată și pentru  $x = \frac{1}{2}$ ,  $x = -\frac{1}{2}$  și  $x = 1$ . Dacă în expresia  $AB - A + B$ ,  $A$  și  $B$  reprezintă expresiile date, atunci nu se pune problema verificării identității pentru  $x = \pm \frac{1}{2}$  și  $x = 1$ .

**24.** Se dau polinoamele:

$$P_1 = ax(xy + ax - a) - a^2(x^2 - y), \quad P_2 = ay(xy + ay - a) - a^2(y^2 - x),$$

$$P_3 = ax(4xy - a) + ay(a + 3xy) \text{ și } P_4 = ay(4xy + a) - ax(a - 3xy),$$

unde  $a \neq 0$ .

1) Să se descompună în factori polinoamele:

$$P_1 + P_2 \quad \text{și} \quad P_3 - P_4.$$

2) Să se arate că expresia

$$E(x, y) = \frac{P_1 + P_2}{P_3 - P_4}$$

nu depinde de  $a$ .

3) Dacă  $y = 5$ , pentru ce valori ale lui  $x$  expresia  $E(x, y)$  nu are sens? Dar dacă  $x = 5$ , pentru ce valori ale lui  $y$  expresia  $E(x, y)$  nu are sens?



4) Care este valoarea numerică a expresiei  $E(x,y)$  dacă:

$$x = \frac{\left(+\frac{4}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{3}{4}\right) - 4 \left(-\frac{1}{3}\right) + 3 \left(-\frac{3}{4}\right)}{-\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{3}}$$

și

$$y = \left[4 \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{3}{4}\right) - 5 \left(-\frac{1}{3}\right) \left(+\frac{4}{5}\right) + 5\right] : \left(-\frac{22}{3}\right).$$

Concurs de matematică, clasa a VII-a, etapa locală-București 1969.

$$1) P_1 + P_2 = a(x^2y + ax^2 - ax - ax^2 + ay) + a(xy^2 + ay^2 - ay - ay^2 + ax) = \\ = a[x^2y - ax + ay + xy^2 - ay + ax] = a(x^2y + xy^2).$$

$$P_1 + P_2 = axy(x + y),$$

$$P_3 - P_4 = a(4x^2y - ax + ay + 3xy^2) - a(4xy^2 + ay - ax + 3x^2y) = \\ = a(4x^2y - ax + ay + 3xy^2 - 4xy^2 - ay + ax - 3x^2y) = a(x^2y - xy^2),$$

$$P_3 - P_4 = axy(x - y).$$

$$2) E(x,y) = \frac{axy(x+y)}{axy(x-y)}; \quad E(x,y) = \frac{x+y}{x-y}.$$

$$3) E(x,5) = \frac{x+5}{x-5}; \quad E(x,5) \text{ nu are sens pentru } x=5.$$

$$E(5,y) = \frac{5+y}{5-y}; \quad E(5,y) \text{ nu are sens pentru } y=5.$$

$$4) x = \frac{\left(+\frac{4}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{3}{4}\right) - 4 \left(-\frac{1}{3}\right) + 3 \left(-\frac{3}{4}\right)}{-\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{9}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{3} - \frac{9}{4}}{\frac{1}{4}} = -\frac{7}{12} \cdot 4 = -\frac{7}{3},$$

$$x = -\frac{7}{3}.$$

$$y = \left[4 \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{3}{4}\right) - 5 \left(-\frac{1}{3}\right) \left(+\frac{4}{5}\right) + 5\right] : \left(-\frac{22}{3}\right) = \\ = \left(1 + \frac{4}{3} + 5\right) : \left(-\frac{22}{3}\right) = \frac{22}{3} : \left(-\frac{22}{3}\right) = -1,$$

$$E\left(-\frac{7}{3}, -1\right) = \frac{\frac{-7}{3} - 1}{\frac{-7}{3} + 1} = -\frac{10}{3} : \frac{3}{-4} = \frac{5}{2}$$

25. 1) Să se efectueze:

$$\frac{8 - \left(\frac{1}{x+y}\right)^3}{4 - \frac{4}{x+y} + \left(\frac{1}{x+y}\right)^2} - \frac{6}{2x+2y-1}$$

2) Se dau polinoamele:

$$D(x) = 2x^2 - 9x + 15 \quad \text{și} \quad I(x) = x - 2.$$

a) Să se afle citul și restul împărțirii  $D(x) : I(x)$ .

b) Să se găsească valorile întregi ale lui  $x$  pentru care fracția  $F(x) = \frac{D(x)}{I(x)}$  are valori numerice întregi.

Concurs de matematică, clasa a VIII-a București 1969:

$$\begin{aligned} 1) & \frac{8 - \left(\frac{1}{x+y}\right)^3}{4 - \frac{4}{x+y} + \left(\frac{1}{x+y}\right)^2} - \frac{6}{2x+2y-1} = \\ & = \frac{\left(2 - \frac{1}{x+y}\right) \left[4 + \frac{2}{x+y} + \left(\frac{1}{x+y}\right)^2\right]}{\left(2 - \frac{1}{x+y}\right)^2} - \frac{6}{2x+2y-1} = \\ & = \frac{4 + \frac{2}{x+y} + \left(\frac{1}{x+y}\right)^2}{\frac{2x+2y-1}{x+y}} - \frac{6}{2x+2y-1} = \\ & = \frac{4(x+y)^2 + 2(x+y) + 1 - 6(x+y)}{(2x+2y-1)(x+y)} = \\ & = \frac{4(x+y)^2 - 4(x+y) + 1}{(2x+2y-1)(x+y)} = \frac{(2x+2y-1)^2}{(2x+2y-1)(x+y)} = \frac{2x+2y-1}{x+y} \end{aligned}$$

$$2) \quad a) \quad (2x^2 - 9x + 15) : (x - 2) = 2x - 5 \text{ (rest 5).}$$

$$Q = x - 2, \quad R = 5, \quad \begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 15 \\ - 5x + 10 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} x - 2 \\ 2x - 5 \\ \hline 5 \end{array}$$

b) Pentru ca fracția  $F(x) = \frac{D(x)}{I(x)}$  să aibă valori numerice întregi trebuie să determinăm pe  $x$  astfel încât valoarea numerică a împărțitorului  $(x - 2)$  să fie un divizor al lui 5. În mulțimea numerelor întregi, 5 are divizorii  $\pm 1, \pm 5$  deci:

$$1) x - 2 = 1; \quad 2) x - 2 = -1; \quad 3) x - 2 = 5; \quad 4) x - 2 = -5$$

de unde:  $x = 3; \quad x = 1; \quad x = 7; \quad x = -3.$

*Observare.* În mulțimea numerelor naturale 5 are ca divizori numai numerele 1 și 5 deci, în acest caz,  $x = 3$  și  $x = 7$ .

## VI

### Rapoarte și proporții

**Definiție.** Cîtul  $\frac{a}{b}$  în care  $a$  și  $b$  sînt numere reale se numește raport;  $a$  și  $b$  sînt termenii raportului.

Rapoartele  $\frac{a}{b}$  și  $\frac{c}{d}$  sînt echivalente dacă este satisfăcută relația  $a \cdot d = b \cdot c$ .

**Proprietăți. Amplificarea.**  $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$  ( $m$  este număr real) căci  $a \cdot b \cdot m = b \cdot a \cdot m$ .

**Simplificarea.**  $\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}$  căci  $ab : m = ba : m$ .

Raportul a două segmente este raportul măsurilor lor dacă au fost măsurate cu aceeași unitate de măsură. Dacă măsurăm ambele segmente cu altă unitate de măsură, obținem rapoarte echivalente.

**Exemplu.**  $AB = 3 \text{ cm}$ ,  $CD = 5 \text{ cm}$ ,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5} \quad \text{Dar } 3 \text{ cm} = 30 \text{ mm}, 5 \text{ cm} = 50 \text{ mm.}$$

În acest caz  $\frac{AB}{CD} = \frac{30}{50}$ ,  $\frac{30}{50} = \frac{3}{5}$  (rapoarte echivalente).

$\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}$  (dacă  $AB$  a fost împărțit în 3 părți egale atunci  $CD$  are 5 asemenea părți)

**Definiție.** Un raport cu numitorul 100,  $\frac{a}{100}$  se numește raport procentual.

$\frac{a}{100}$  se mai scrie  $a \%$  și se citește „ $a$  la sută”. Un raport cu numitorul 1 000 se scrie  $a^0/_{00}$  și se citește „ $a$  la mie”.

**Definiție.** Două rapoarte echivalente  $\frac{a}{b}$  și  $\frac{c}{d}$  formează o proporție:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ .

Termenii  $a$  și  $d$  se numesc *extremi*,  $b$  și  $c$ , *mezi*.

**Proprietatea fundamentală a proporțiilor.** Într-o proporție produsul mezilor este egal cu produsul extremilor.



În adevăr, aceasta e condiția ca rapoartele să fie echivalente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot a \cdot d = c \cdot b.$$

Exemple. 1) Să se verifice dacă rapoartele

$$r_1 = \frac{1\frac{2}{3}}{3\frac{5}{7}} \text{ și } r_2 = \frac{2\frac{1}{2}}{4\frac{1}{3}} \text{ sînt echivalente (formează o proporție).}$$

$$r_1 = \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{26} = \frac{35}{78}, \quad r_2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{13} = \frac{15}{26}$$

$$35 \cdot 26 = 910, \quad 78 \cdot 15 = 1170.$$

Deci  $r_1 \neq r_2$ .

2) Aceeași întrebare pentru rapoartele

$$r_1 = \frac{1\frac{1}{3}}{2\frac{2}{5}} \text{ și } r_2 = \frac{3}{5 + \frac{2}{5}}.$$

Aducem rapoartele la forma simplă

$$r_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{9}, \quad r_2 = 3 : \frac{27}{5}; \quad 3 : \frac{27}{5} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}.$$

Deci  $r_1 = r_2$ .

Dacă lucrăm direct, aplicînd proprietatea fundamentală, atunci efectuăm produsele:

$$1\frac{1}{3} \left( 5 + \frac{2}{5} \right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{27}{5} = \frac{36}{5},$$

$$3 \cdot 2\frac{2}{5} = 3 \cdot \frac{12}{5} = \frac{36}{5},$$

deci  $r_1 = r_2$ .

3) Să se calculeze termenul necunoscut din proporțiile:

$$\text{a) } \frac{x}{3} = \frac{7}{5}; \quad \text{b) } \frac{5}{x} = \frac{7}{8}; \quad \text{c) } \frac{x}{a} = \frac{b}{c}; \quad \text{d) } \frac{a}{x} = \frac{b}{c}$$

Aplicăm proprietatea fundamentală a proporției.

a)  $5x = 3 \cdot 7; \quad 5x = 21.$  Cunoaștem produsul și unul din factori.

$$x = \frac{21}{5}.$$

Termenul necunoscut se numește al patrulea proporțional între trei numere date.

$$b) \frac{5}{x} = \frac{7}{8}; \quad 5 \cdot 8 = 7x; \quad x = \frac{5 \cdot 8}{7}; \quad x = \frac{40}{7}$$

$$c) cx = ab; \quad x = \frac{ab}{c}; \quad d) \quad ac = bx; \quad x = \frac{ac}{b}.$$

*Media proporțională.* Numărul  $b$  care ocupă într-o proporție cu termeni pozitivi locul mezilor sau al extremilor se numește media proporțională a celorlalte două numere  $a$  și  $c$ .

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \text{ sau } \frac{a}{b} = \frac{c}{a}.$$

Aflarea mediei proporționale:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}. \text{ Aplicăm proprietatea fundamentală a proporției } a \cdot c = b^2 \text{ de unde } b = \sqrt{ac}.$$

*Regulă.* Media proporțională,  $b$ , a două numere  $a$  și  $c$ , se află extrăgând rădăcina pătrată din produsul celor două numere.

*Proprietate a două rapoarte echivalente.* Raportul format făcând suma (diferența) numărătorilor pe suma (diferența) numitorilor este un raport echivalent cu rapoartele date.

$$\text{Dacă } 1) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ atunci } \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}.$$

În adevăr, din (1),  $ad = bc$ .

$$\text{Adunând (scăzând) în ambii membri } ab, \quad ad \pm ab = bc \pm ab \text{ sau } a(d+b) = b(c+a), \text{ deci } \frac{a}{b} = \frac{c+a}{d+b}.$$

### Proporții derivate

1) Schimbând mezii între ei sau extremii între ei sau și mezii și extremii între ei, obținem tot proporții.

$$\text{Dacă } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ atunci } 1) \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \quad 2) \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad 3) \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

În adevăr, din  $ad = bc$  rezultă pe baza proprietăților de comutativitate a produsului:

$$1) \quad da = bc, \quad 2) \quad ad = cb, \quad 3) \quad da = cb.$$

2) Amplificând sau simplificând un termen sau amândoi termenii unei proporții, obținem tot o proporție.

*Consecință.* Dacă înmulțim sau împărțim ambii numărători sau ambii numitori ai rapoartelor — termenii proporției — cu același număr, obținem tot o proporție.

$$\text{Exemple. } \frac{5}{27} = \frac{10}{54}, \quad \frac{5}{27 : 3} = \frac{10}{54 : 3} \text{ sau } \frac{5}{9} = \frac{10}{18} \text{ căci } 5 \cdot 18 = 90.$$

3) Dacă într-o proporție înlocuim termenii corespunzători din cele două rapoarte prin suma sau diferența termenilor raportului respectiv obținem tot o proporție.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}; \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

În adevăr, din  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  avem (schimbând mezii)

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}. \text{ Aplicând proprietatea rapoartelor echivalente avem}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{a+b}{c+d}. \text{ Schimbând mezii între ei,}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}.$$

4) Dacă se dă o proporție  $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$  atunci putem obține o nouă proporție egalând raportul format de suma numărătorilor pe suma numitorilor cu raportul format de diferența numărătorilor pe diferența numitorilor.

$$\text{Dacă } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ avem și } \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}.$$

$$\text{În adevăr, dacă } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ atunci } a = bk, \quad c = dk$$

Adunînd (scăzînd) membru cu membru cele două egalități,

$$a \pm c = k(b \pm d) \quad \text{deci } \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = k.$$

Șir de rapoarte echivalente. Într-un șir de rapoarte echivalente raportul format de suma numărătorilor pe suma numitorilor este echivalent cu rapoartele date.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = \frac{l}{m} = \frac{a+c+e+\dots+l}{b+d+f+\dots+m}.$$

$$\text{Notînd } k = \frac{a}{b},$$

$$a = bk; \quad c = dk; \dots; l = mk.$$

$$\text{Prin însumare } a+c+e+\dots+l = k(b+d+f+\dots+m),$$

$$\text{de unde: } \frac{a+c+e+\dots+l}{b+d+f+\dots+m} = k.$$

Exemplu.

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{7}{14} = \frac{1+3+5}{2+6+10} = \frac{1+3+5+7}{2+6+10+14} \\ \frac{1+3+5}{2+6+10} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1+3+5+7}{2+6+10+14} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}.$$



## Mărimi proporționale

Numim mărime constantă mărimea care păstrează aceeași valoare într-o problemă dată.

Exemple: viteza într-o mișcare uniformă; raportul dintre lungimea cercului și diametru ( $\pi$ ) etc.

Numim mărime *variabilă* o mărime a cărei valoare se schimbă (într-o problemă dată).

**Definiție.** Două mărimi variabile, care depind una de alta astfel încât dacă una crește de un număr de ori cealaltă crește (se micșorează) de același număr de ori, se numesc mărimi *direct* (*invers*) *proporționale*.

**Exemple.** 1) Timpul și distanța parcursă în mișcarea uniformă sînt mărimi direct proporționale.

2) Timpul și viteza cînd distanța este constantă sînt mărimi invers proporționale.

3) Aria dreptunghiului și înălțimea cînd baza rămîne constantă sînt mărimi direct proporționale.

4) Cantitatea de marfă și prețul total cînd prețul unitar este constant sînt mărimi direct proporționale.

5) Prețul unitar și prețul total cînd cantitatea este constantă sînt mărimi invers proporționale.

6) Numărul lucrătorilor (cu aceeași productivitate) și timpul necesar efectuării unei lucrări sînt mărimi invers proporționale.

Dacă două mărimi sînt direct proporționale raportul a două valori ale uneia din ele este egal cu raportul valorilor corespunzătoare ale celeilalte.

Dacă mărimile sînt invers proporționale raportul a două valori ale uneia din ele este egal cu inversul raportului valorilor corespunzătoare ale celeilalte mărimi.

**Exemple.** 1) Dacă un mobil merge cu viteza constantă  $v$  atunci distanța depinde de timp după cum rezultă din tabelul:

$t$	$\frac{1h}{2}$	$1h$	$2h$	$3h$	$4h$	$5h$
$s$	$\frac{v}{2}$	$v$	$2v$	$3v$	$4v$	$5v$

Raportul a două valori din primul șir este egal cu raportul valorilor corespunzătoare din al doilea șir.

$$\frac{2}{3} = \frac{2v}{3v}; \quad \frac{2}{5} = \frac{2v}{5v}; \quad \frac{1}{4} = \frac{v}{4v} \text{ etc.}$$

2) Dacă un mobil parcurge o distanță  $d$ , timpul necesar depinde de viteza mobilului după cum rezultă din tabelul:

$v$ în km/oră	1	2	3	5	7
$t$ în ore	$d$	$\frac{d}{2}$	$\frac{d}{3}$	$\frac{d}{5}$	$\frac{d}{7}$

Raportul a două valori din primul șir este egal cu inversul raportului valorilor corespunzătoare din al doilea șir

de exemplu:  $\frac{1}{3} = \frac{\frac{d}{3}}{d}$ ;  $\frac{2}{5} = \frac{\frac{d}{5}}{\frac{d}{2}}$ ;  $\frac{2}{7} = \frac{\frac{d}{7}}{\frac{d}{2}}$ ;  $\frac{3}{7} = \frac{\frac{d}{7}}{\frac{d}{3}}$ ;  $\frac{7}{2} = \frac{\frac{d}{2}}{\frac{d}{7}}$  etc.

*Observare.* Există mărimi care depind una de alta fără a fi proporționale. De exemplu: latura și aria triunghiului echilateral, raza și aria cercului, timpul și distanța în mișcarea neuniformă etc. Dacă latura triunghiului echilateral se mărește de 2, 3, 4, 5 ori, aria sa se mărește de 4, 9, 16, 25 ori (fig. 7).

### Numere direct sau invers proporționale cu alte numere

Două numere  $x$  și  $y$  sînt direct proporționale cu alte două numere  $a$  și  $b$  dacă  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ .

Mai multe numere  $x, y, z, u, v, \dots$  sînt proporționale cu tot atîtea numere  $a, b, c, d, e, \dots$ , dacă rapoartele formate cu numerele din primul șir și numerele corespunzătoare din al doilea șir sînt echivalente.

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d} = \dots$$

Mai multe numere  $x, y, z, \dots$  sînt invers proporționale cu alte numere  $a, b, c, \dots$  dacă sînt direct proporționale cu numerele  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \dots$ .

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = \dots$$

A împărți un număr  $N$  în părți direct proporționale cu  $n$  numere date, înseamnă a găsi  $n$  numere care să fie proporționale cu numerele date și a căror sumă să fie  $N$ .

De exemplu, să se împartă numărul  $N$  în părți proporționale cu numerele  $a, b, c$ . Fie cele trei numere  $x, y, z$ .

Trebuie ca:  $x + y + z = N$  și  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ .

A împărți un număr  $N$  în părți invers proporționale cu  $n$  numere date ( $a, b, c, \dots$ )

înseamnă a împărți numărul  $N$  în părți direct proporționale cu numerele  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \dots$ .

*Exemple.* 1) Să se împartă 2 250 în părți direct proporționale cu numerele 2, 3, 4. Căutăm 3 numere  $x, y, z$  astfel ca:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \text{ și } 2\,250 = x + y + z.$$

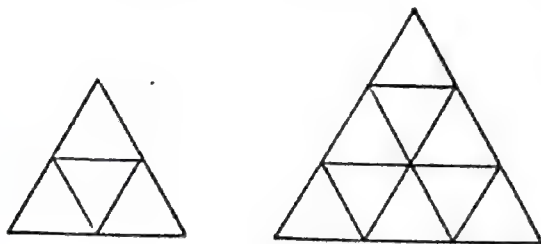


Fig. 7

Aplicînd proprietatea unui şir de rapoarte echivalente

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{2250}{9} = 250.$$

$$x = 500, y = 750, z = 1\,000.$$

2) Să se împartă numărul 310 în părţi invers proporţionale cu numerele 2, 3, 5.

Trebuie să găsim 3 numere  $x, y, z$  astfel ca  $x + y + z = 310$ ;  $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{5}}$ .

Aducem fracţiile la acelaşi numitor  $\frac{1}{2} = \frac{15}{30}$ ;  $\frac{1}{3} = \frac{10}{30}$ ;  $\frac{1}{5} = \frac{6}{30}$ .

Şirul de rapoarte devine:

$$\frac{x}{\frac{15}{30}} = \frac{y}{\frac{10}{30}} = \frac{z}{\frac{6}{30}}. \quad \text{Împărţind fiecare raport cu 30 obţinem tot rapoarte echivalente.}$$

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6}. \quad \text{Deci } N \text{ se împarte în părţi direct proporţionale cu numerele } 15, 10, 6 \text{ (numărătorii fracţiilor după ce le-am adus la acelaşi numitor).}$$

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6} = \frac{310}{31} = 10; \quad x = 150; y = 100; z = 60.$$

*Observări.* 1) Dacă numerele  $x, y, z$  sînt invers proporţionale cu numerele  $a, b, c$ , atunci raportul a două numere din primul şir este egal cu raportul invers al numerelor corespunzătoare din al doilea şir.

2) Pentru a împărţi un număr în părţi direct proporţionale cu mai multe fracţii aducem fracţiile la acelaşi numitor apoi împărţim numărul în părţi direct proporţionale cu numărătorii acestor fracţii (aduse la acelaşi numitor).

3) Pentru a împărţi un număr în părţi invers proporţionale cu mai multe numere  $a, b, c$  împărţim numărul în părţi direct proporţionale cu  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ .

4) Dacă numerele  $x, y, z$  sînt proporţionale cu numerele  $a, b, c$ , atunci ele sînt proporţionale şi cu  $ka, kb, kc$ ,  $k$  fiind orice număr real diferit de zero.

Dacă  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$  prin împărţirea raportului cu  $k$  obţinem tot rapoarte egale:

$$\frac{x}{ka} = \frac{y}{kb} = \frac{z}{kc}.$$



*Exemple.*

Să se împartă numărul 100 în părți direct proporționale cu numerele  $1\frac{1}{2}$ ,  $2\frac{5}{6}$ ,  $2\frac{1}{3}$ .

Numerele le scriem sub formă de fracții echivalente aduse la același numitor

$1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{9}{6}$ ,  $2\frac{5}{6} = \frac{17}{6}$ ,  $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3} = \frac{14}{6}$ . Cele 3 numere vor fi  $x$ ,  $y$ ,  $z$  date de relațiile:

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{17} = \frac{z}{14} = \frac{100}{40} = \frac{5}{2}.$$
$$x = \frac{45}{2} = 22,5, \quad y = \frac{85}{2} = 42,5, \quad z = 35.$$

## VII

### Ecuații și sisteme de ecuații

#### I. Ecuații de gradul I cu o necunoscută

Fiind dat polinomul  $P(x)$ , dacă aflăm valorile lui  $x$ , într-o anumită mulțime numerică, pentru care polinomul se anulează, spunem că am rezolvat ecuația cu o singură necunoscută  $P(x) = 0$  în mulțimea numerică dată.

Valorile necunoscutei care satisfac ecuația se numesc rădăcini sau soluții ale ecuației.

Se numesc ecuații echivalente ecuațiile care au aceleași rădăcini în mulțimea dată (Rădăcinile uneia din ecuații sînt și rădăcini ale celeilalte și reciproc).

Dacă ecuația este satisfăcută de orice valori (din mulțimea considerată) date necunoscutei atunci avem o identitate.

Dacă ecuația nu e satisfăcută de nici o valoare din mulțimea considerată spunem că ecuația nu are soluție în această mulțime.

O ecuație în care numai necunoscuta este notată cu o literă ( $x, y, z, \dots$ ) iar cantitățile cunoscute prin numere, se numește ecuație cu coeficienți numerici.

*Exemplu.*  $5x - 3 = 7 + x$ .

Dacă coeficienții (sau numai unii din ei) sînt exprimați prin litere ( $a, b, c, \dots$ ), atunci ecuația are coeficienți literali și se numește ecuație literală.

*Exemple.*  $ax + 3 = b - 3x$ ;  $ax + 2bx = cx + d$ .

#### Proprietățile egalităților

##### Egalități numerice

1) Dacă adunăm sau scădem același număr în ambii membri ai unei egalități, obținem tot o egalitate.

*Exemplu.*  $3 = 5 - 2$ ,

$$3 + 11 = 5 - 2 + 11.$$

##### Ecuații

1) Dacă adunăm sau scădem același număr în ambii membri ai unei ecuații, obținem o ecuație echivalentă.

*Exemplu:*  $x + 2 = 3$  este satisfăcut de  $x = 1$ , și numai de această valoare.

Ecuațiile  $x + 2 \pm 1 = 3 \pm 1$ ;  $x + 3 = 4$ ;  $x + 1 = 2$ .

admit ca singură rădăcină  $x = 1$ .

*Consecință.* Dacă într-o ecuație trecem un termen dintr-un membru în altul cu semnul schimbat, obținem o ecuație echivalentă.

$$x + a = 2a \text{ are soluția } x = a.$$

$$x + a - a = 2a - a \text{ are soluția } x = a.$$

2) Dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei egalități cu un număr diferit de zero obținem tot o egalitate

$$15 = 50 - 35,$$

$$15 \cdot 2 = (50 - 35) \cdot 2,$$

$$15 : 5 = (50 - 35) : 5.$$

2) Dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei ecuații cu același număr diferit de zero obținem o ecuație echivalentă.

Exemple: 1)  $2x + 1 = 7$  are soluția  $x = 3$

$$3(2x + 1) = 3 \cdot 7.$$

$$6x + 3 = 21 \text{ are soluția } x = 3$$

$$\text{căci } 3 \cdot 7 = 3 \cdot 7.$$

2)  $4x + 2 = 6$  are soluția  $x = 1$

$$(4x + 2) : 2 = 6 : 2.$$

$$2x + 1 = 3 \text{ are soluția } x = 1$$

$$\text{căci } 6 : 2 = 6 : 2.$$

**Consecințe.** 1) Dacă avem o ecuație de forma  $ax = b$  ( $a \neq 0$ ) împărțim cu  $a$  ambii membri și obținem  $x = \frac{b}{a}$  (soluția ecuației). În adevăr  $a \cdot \frac{b}{a} = b$ .

2) Dacă toți coeficienții unei ecuații sînt divizibili cu un număr, putem împărți ambii membri ai ecuației cu acest număr.

3) Dacă ecuația are numitori (numerici) îi eliminăm prin înmulțirea ambilor membri ai ecuației, cu numitorul comun și obținem o ecuație echivalentă.

*Exemple*

1) Ecuația  $\frac{5x}{2} - 1 = \frac{13}{2}$  are soluția  $x = 3$ .

Aducînd la același numitor avem:

$$\frac{5x - 2}{2} = \frac{13}{2} \text{ înmulțim în ambii membri cu 2 obținem}$$

$$5x - 2 = 13 \text{ care are rădăcina tot } x = 3.$$

Cele două ecuații sînt echivalente.

2) Dacă numitorii conțin și litere punem condiția ca numitorii să fie diferiți de zero, căci împărțirea la zero nu are sens.

Ecuația  $\frac{1-x}{x} = -\frac{1}{2}$  are soluția  $x = 2$ .

Aducem la același numitor:  $\frac{2-2x}{2x} = -\frac{x}{2x}$ .

Eliminăm numitorul ( $x \neq 0$ ). Ecuația  $2 - 2x = -x$  are soluția  $x = 2$ . În adevăr,  $2 - 2 \cdot 2 = -2$ .

3) Dacă înmulțim ambii membri cu o expresie care conține necunoscuta obținem în general o ecuație care nu este echivalentă cu ecuația dată (dacă acest factor se anulează).

Ecuația  $x - 1 = 2$  are soluția  $x = 3$ .

Înmulțim în ambii membri cu  $(x - 2)$ .

$$(x - 2)(x - 1) = 2(x - 2) \text{ și obținem ecuația}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 2x - 4 \text{ care admite rădăcina } x = 3.$$

$$9 - 9 + 2 = 6 - 4; \quad 2 = 2.$$



Ecuatia mai admite insa si solutia  $x = 2$ .

În adevăr,  $4 - 6 + 2 = 4 - 4$ .

Deci ecuatia obținută nu este echivalentă cu cea dată căci ecuatia  $x - 1 = 2$  nu admite rădăcina  $x = 2$ ;

$$2 - 1 \neq 2.$$

Dacă o ecuație cu o necunoscută este echivalentă cu o ecuație de forma  $ax + b = 0$  sau  $ax = b$  (forma normală a ecuației) atunci ecuatia este de gradul I. Pentru a aduce o ecuație la forma normală facem toate operațiile indicate.

a) Desfacem parantezele (dacă există).

b) Eliminăm numitorii (dacă există) punind condiția ca numitorii să fie diferiți de zero.

c) Aplicăm proprietățile ecuațiilor echivalente trecând toți termenii care conțin necunoscuta într-un membru și termenii care nu conțin necunoscuta în celălalt membru.

d) Strângem termenii asemenea în ambii membri.

*Exemple*

$$1) 13x - 8(3x - 2) = -7x - 5(12 - 3x).$$

Desfacem parantezele

$$13x - 24x + 16 = -7x - 60 + 15x.$$

Trecem termenii care conțin necunoscuta în membrul întâi iar termenii liberi (de grad zero) în membrul al doilea.

$$13x - 24x + 7x - 15x = -60 - 16.$$

Strângem termenii asemenea:

$$-19x = -76.$$

Ecuatia obținută este de forma

$$ax = b \text{ în care } a = -19 \text{ și } b = -76; \quad x = \frac{-76}{-19} = 4.$$

$$2) \frac{2x-5}{6} + \frac{x+2}{4} = \frac{5-2x}{3} - \frac{6-7x}{4} + 1.$$

Aducem la același numitor (12)

$$\frac{4x-10+3x+6}{12} = \frac{20-8x-18+21x+12}{12}.$$

Înmulțim în ambii membri cu numitorul comun (12),

$$4x - 10 + 3x + 6 = 20 - 8x - 18 + 21x + 12.$$

Separăm termenii de gradul I și de gradul zero în cei doi membri ai ecuației

$$4x + 3x + 8x - 21x = 10 - 6 + 20 - 18 + 12.$$

Strângem termenii asemenea

$$-6x = 18.$$



Ecuatia este de forma  $ax = b$  în care  $a = -6$ ;  $b = 18$ ;

$$x = \frac{18}{-6} = -3.$$

$$3) \frac{x}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{m} - \frac{x}{n} \quad m \neq 0, \quad n \neq 0$$

Aducem la același numitor ( $mn$ ) și eliminăm numitorul ( $mn \neq 0$ ):

$$nx + m = n - mx$$

Scriem ecuația sub forma normală  $(n + m)x + m - n = 0$ .

Ecuatia  $(n + m)x = n - m$  este de forma  $ax = b$  în care  $a = m + n$  și  $b = n - m$ .

$$x = \frac{n - m}{m + n}, \quad m + n \neq 0.$$

Dacă  $m = -n$  ecuația (3) devine:

$$3') \frac{x}{m} + \frac{1}{m} = \frac{1}{m} + \frac{x}{m}.$$

sau

$$x - 1 = 1 + x, \text{ care nu are soluție } (-1 \neq 1).$$

Concluzie.

Pentru a rezolva o ecuație de gradul I cu o necunoscută, aducem ecuația la forma normală

$$ax + b = 0 \quad \text{sau} \quad ax = -b$$

și rezolvăm ecuația obținută.

*Exemple*

$$1) (m - 1)x + 2 + m = 2m - 3x.$$

Aducem ecuația la forma normală.

$$mx - x + 3x = 2m - m - 2$$

$$mx + 2x = m - 2$$

$$x(m + 2) = m - 2$$

$$x = \frac{m - 2}{m + 2}.$$

(strângem termenii asemenea și dăm pe  $x$  factor comun)

(împărțim în ambii membri cu coeficientul lui  $x$  cu condiția  $m + 2 \neq 0$ ).

Dacă  $m = -2$  ecuația (1) devine

$$1') -3x = -4 - 3x \text{ care nu are soluție.}$$

Verificarea se face în ecuația dată

$$\text{I} \quad (m - 1) \frac{m - 2}{m + 2} + 2 + m;$$

$$\text{II} \quad 2m - 3 \cdot \frac{m - 2}{m + 2}.$$

Aducem la același numitor și facem operațiile indicate de semne

$$I \quad \frac{m^2 - 3m + 2 + m^2 + 4m + 4}{m + 2} = \frac{2m^2 + m + 6}{m + 2}$$

$$II \quad \frac{2m^2 + 4m - 3m + 6}{m + 2} = \frac{2m^2 + m + 6}{m + 2}$$

Pentru ambii membri am găsit aceeași expresie, deci  $x = \frac{m - 2}{m + 2}$  este rădăcina ecuației date,  $m$  fiind orice număr real în afară de  $m = -2$  pentru care expresia  $\frac{m - 2}{m + 2}$  nu are sens

$$2) \quad \frac{1}{x - 2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$$

Ecuația are sens pentru orice  $x$  număr real în afară de  $x = 2$  pentru care fracția  $\frac{1}{x - 2}$  nu are sens. Aducem ecuația la forma normală.

$$\frac{6 - 4(x - 2)}{6(x - 2)} = \frac{-x + 2}{6(x - 2)}$$

Eliminăm numitorul înmulțind cu ambii membri ai ecuației cu  $6(x - 2)$  căci  $x - 2 \neq 0$ .

$$\begin{aligned} 6 - 4x + 8 &= -x + 2; \\ -4x + x &= 2 - 8 - 6; \\ -3x &= -12, \end{aligned}$$

Separăm termenii.

Strângem termenii asemenea împărțind cu coeficientul necunoscutului.

$$x = \frac{-12}{-3},$$

$$x = 4.$$

$$\text{Verificare: } I \quad \frac{1}{4 - 2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6},$$

$$II \quad -\frac{1}{6}.$$

$x = 4$  este soluția ecuației date.

În practică pentru simplificarea scrisului înainte de a separa termenii sau de a elimina numitorii putem face reducerea termenilor asemenea în fiecare membru.

De exemplu în ecuația:

$-5x + 3 - 7x + 9 = -x + 1 + 2x - 15$  strângem termenii asemenea în fiecare membru:

$$-12x + 12 = x - 14 \quad \text{apoi separăm termenii}$$

$$-12x - x = -14 - 12; \quad -13x = -26; \quad x = \frac{-26}{-13}; \quad x = 2.$$

$$3) \quad \frac{x^2 - 3}{1 - x^2} + \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{4}{1 + x}$$

Pentru ca fracțiile să aibă sens, numitorii trebuie să fie diferiți de zero deci  $1 - x \neq 0$  și  $1 + x \neq 0$  sau  $x \neq 1$  și  $x \neq -1$ .

Aducem la același numitor.

$$\frac{x^2 - 3}{(1 - x)(1 + x)} + \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{4}{1 + x}$$

$$x^2 - 3 - (x + 1)^2 = 4 - 4x$$

$$x^2 - 3 - x^2 - 2x - 1 = 4 - 4x$$

$$-2x + 4x = 4 + 4$$

$$2x = 8.$$

$$x = \frac{8}{2}; \quad x = 4.$$

Înmulțim cu numitorul comun  $(1 - x^2) \neq 0$ , desfacem paranteza, strângem termenii asemenea în fiecare membru. Separăm termenii și strângem termenii asemenea.

Verificare. I  $\frac{16 - 3}{1 - 16} + \frac{4 + 1}{4 - 1} = \frac{13}{-15} + \frac{5}{3}$

$$= -\frac{13}{15} + \frac{25}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

II  $\frac{4}{1 + 4} = \frac{4}{5}; \quad x = 4$  este soluția ecuației.

### Discuția ecuației de gradul I cu o necunoscută

Ecuația  $ax = b$  are soluția  $x = \frac{b}{a}$  cu condiția  $a \neq 0$ .

Dacă  $a = 0$  întâlnim situațiile:

1.  $b \neq 0$  — ecuația nu are soluție: este imposibilă;
2.  $b = 0$  — ecuația are o infinitate de soluții; este nedeterminată. Egalitatea dată este o identitate.

Exemple. 1)  $2x - 5 = x + 6 + x$

$$2x - 5 = 2x + 6$$

$$2x - 2x = 6 + 5$$

$$0 \cdot x = 11, (a = 0, b \neq 0)$$

Dar  $x \cdot 0 = 0$  (orice număr înmulțit cu 0 este 0) deci nu există nici o valoare a necunoscutei pentru care  $0 \cdot x = 11$ . Ecuația nu are soluție, este imposibilă.

2)  $3x + 6 = 2x + x + 4 + 2,$

$$3x + 6 = 3x + 6,$$

$$3x - 3x = 6 - 6$$

$0 \cdot x = 0$ ;  $x$  poate lua orice valoare. Ecuația 2) este o identitate (este verificată de orice valori date necunoscutei).



De exemplu pentru:  $x = -1$ ;  $-3 + 6 = -2 - 1 + 4 + 2$ .

$$x = 2; \quad 6 + 6 = 4 + 2 + 4 + 2.$$

$$x = \frac{1}{2}; \quad \frac{3}{2} + 6 = 1 + \frac{1}{2} + 4 + 2; \quad 7 \frac{1}{2} = 7 \frac{1}{2}.$$

$$x = 0; \quad 6 = 4 + 2.$$

$$x = -5; \quad -15 + 6 = -10 - 5 + 4 + 2. \quad -9 = -9.$$

## II. Sisteme de două ecuații de gradul I cu două necunoscute

Se numește sistem de două ecuații cu două necunoscute un ansamblu de două ecuații cu aceleași necunoscute.

Un sistem de două ecuații de gradul I cu două necunoscute are forma normală

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

unde  $a, b, c, a', b', c'$  sînt numere.

Două sisteme sînt echivalente dacă au aceleași soluții.

Un sistem se aduce la forma normală pe baza proprietăților stabilite la ecuațiile de gradul I cu o necunoscută.

A rezolva un sistem de ecuații înseamnă a găsi soluția sau rădăcinile sistemului. Dacă sistemul are două necunoscute trebuie să găsim perechile de numere care verifică sistemul dat.

Pentru a rezolva un sistem de două ecuații de gradul I cu două necunoscute înlocuim sistemul dat printr-un sistem echivalent în care o ecuație are o singură necunoscută (se elimină una din necunoscute).

Pentru eliminarea uneia din necunoscute, vom folosi una din cele trei metode: 1) metoda substituției; 2) metoda reducerii; 3) metoda comparației.

### 1) Metoda substituției

$$\text{Sistemul } \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ este echivalent cu}$$

$$\text{sistemul } \begin{cases} y = \frac{c - ax}{b} \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ în care am considerat pe } x \text{ ca fiind cunoscută și am}$$

rezolvat ecuația în  $y$ . (Am presupus  $b \neq 0$ .)

Înlocuim expresia care ni-l dă pe  $y$  în cea de-a doua ecuație și obținem sistemul

$$\begin{cases} y = \frac{c - ax}{b} \\ a'x + b' \frac{c - ax}{b} = c' \end{cases}$$

în care ultima ecuație are o singură necunoscută.

Rezolvăm această ecuație.

$$ba'x + b'c - b'ax = c'b$$

$$x(ba' - b'a) = c'b - b'c$$

$$x = \frac{c'b - b'c}{ba' - b'a}$$

Aflăm pe  $y$  din prima ecuație a sistemului.

$$c - a \frac{c'b - b'c}{ba' - b'a}$$

$$y = \frac{c - a \frac{c'b - b'c}{ba' - b'a}}{b}$$

$$y = \frac{c(ba' - b'a) - a(c'b - b'c)}{b(ba' - b'a)}$$

$$y = \frac{cba' - cb'a - ac'b + ab'c}{b(ba' - b'a)}$$

$$y = \frac{b(ca' - ac')}{b(ba' - b'a)}$$

Soluția sistemului este:

$$x = \frac{c'b - b'c}{ba' - b'a}, \quad y = \frac{ca' - ac'}{ba' - b'a} \quad (ba' - b'a \neq 0).$$

Exemple.

1)  $\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 4x - 5y = 10 \end{cases}$  sistemul este echivalent cu

$$\begin{cases} x = \frac{16 - 3y}{2} \\ 4 \cdot \frac{16 - 3y}{2} - 5y = 10. \end{cases}$$

Ultima ecuație conține numai o singură necunoscută ( $y$ ).  
Aflăm valoarea lui  $y$ .

$$2(16 - 3y) - 5y = 10; \quad 32 - 6y - 5y = 10; \quad -11y = -22; \quad y = 2;$$

$$x = \frac{16 - 3 \cdot 2}{2}; \quad x = 8 - 3, \quad x = 5,$$

Soluția sistemului este  $\begin{cases} x = 5. \\ y = 2 \end{cases}$

Verificare (în sistemul dat).

Membrul I

Membrul II

Prima ecuație:  $2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 10 + 6; \quad 16.$

A adoua ecuație:  $4 \cdot 5 - 5 \cdot 2 = 20 - 10; \quad 10.$

2)  $\begin{cases} \frac{7x - 3y}{5} = \frac{5x - y}{3} - \frac{x + y}{2} \\ 3(x - 1) = 5(y + 1). \end{cases}$

Aducem sistemul la forma normală: eliminăm numitorii; desfacem parantezele; separăm termenii care conțin necunoscutele într-un membru iar termenii liberi în celălalt membru.

$$\begin{cases} 6(7x - 3y) = 10(5x - y) - 15(x + y), \\ 3(x - 1) = 5(y + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 42x - 18y = 50x - 10y - 15x - 15y \\ 3x - 3 = 5y + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x + 7y = 0 \\ 3x - 5y = 8. \end{cases} \quad \text{Împărțim ambii membri ai primei ecuații cu 7.}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 5y = 8. \end{cases} \quad \text{Înlocuim cu sistemul echivalent}$$

$$\begin{cases} y = -x \\ 3x - 5(-x) = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \\ 3x + 5x = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \\ 8x = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1. \end{cases}$$

Verificare.

Prima ecuație: I)  $\frac{7+3}{5} = 2$ ; II)  $\frac{5+1}{3} - \frac{0}{2} = \frac{6}{3}$ .

A doua ecuație: I)  $3 \cdot 0 = 0$ ; II)  $5 \cdot 0 = 0$ .

## 2) Metoda reducerii

Sistemul  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  este echivalent cu

sistemul  $\begin{cases} ax + by = c \\ (a'b - ab')y = a'c - ac' \end{cases}$ .

Ecuația a doua s-a obținut prin eliminarea necunoscutei  $x$ . S-a înlocuit mai întâi sistemul dat printr-un sistem echivalent în care necunoscuta  $x$  (pe care am eliminat-o) are coeficienții opuși (egali în valoare absolută dar de semne contrare). Adunând cele două ecuații membru cu membru s-a obținut ecuația a doua care nu-l mai cuprinde pe  $x$ .

Ecuația a doua ne dă pentru  $y$

$$y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'} \quad (a'b - ab' \neq 0).$$

Înlocuind pe  $y$  în prima ecuație cu această valoare, obținem valoarea lui  $x$ :

$$ax + \frac{ba'c - bac'}{a'b - ab'} = c,$$

$$ax = \frac{ca'b - cab' - ba'c + bac'}{a'b - ab'},$$

$$ax = \frac{a(bc' - cb')}{a'b - ab'}.$$

Împărțind cu  $a(a \neq 0)$  în ambii membri se obține

$$x = \frac{bc' - cb'}{a'b - ab'}.$$

Soluția sistemului este deci

$$\begin{cases} x = \frac{bc' - cb'}{a'b - ab'} \\ y = \frac{ac' - ca'}{a'b - ab'} \end{cases}, \quad a'b - ab' \neq 0.$$

Am regăsit soluția obținută prin metoda substituției.

Exemple. 1) 
$$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ -3x + 9y = 6 \end{cases}$$

Eliminăm pe  $x$  (termenii în  $x$  din cele două ecuații au coeficienții, numere opuse)  
Sistemul devine

$$\begin{cases} 13y = 13 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} y = 1 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases} \quad \text{de unde}$$

$$3x + 4 = 7, \quad 3x = 3, \quad x = 1.$$

Soluția sistemului: 
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

**Observări.** 1) Când eliminăm o necunoscută facem ca în ambele ecuații coeficienții acestei necunoscute să reprezinte în valoare absolută cel mai mic multiplu comun al lor.

2) În practică vom căuta să eliminăm necunoscuta pentru care este mai simplu de aflat c.m.m.m.c al coeficienților.

a) 
$$\begin{cases} 2x - 8y = -6 \\ 4x - 5y = -1 \end{cases} \quad | -2.$$

Este mai simplu să eliminăm pe  $x$ . Înmulțim ambii membri ai primei ecuații cu  $(-2)$ . Practic ducem o linie verticală la dreapta sistemului și scriem în dreptul ecuației numărul respectiv. Sistemul devine:

$$\begin{cases} -4x + 16y = +12 \\ 4x - 5y = -1. \end{cases}$$

Adunând membru cu membru obținem  $11y = 11$ .

Sistemul devine:

$$\begin{cases} y = 1 \\ 4x - 5y = -1 \end{cases}, \quad \text{deci} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

b) 
$$\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 5x + 4y = 3. \end{cases}$$



Eliminăm necunoscuta  $y$ ; c.m.m.m.c. al coeficienților este 20. Sistemul devine

$$\begin{cases} 8x - 20y = -4 \\ 25x + 20y = 15. \end{cases}$$

$$33x = 11, \quad x = \frac{11}{33}, \quad x = \frac{1}{3}.$$

Sistemul devine

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ 2x - 5y = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} - 5y = -1 \end{cases}$$

$$-5y = -\frac{5}{3}, \quad y = \frac{1}{3}.$$

Soluția sistemului:  $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}.$

### 3) Metoda comparației

Sistemul  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

este echivalent cu sistemul obținut rezolvând ambele ecuații în raport cu aceeași necunoscută.

$$\begin{cases} y = \frac{c - ax}{b} \\ y = \frac{c' - a'x}{b'}. \end{cases}$$

Egalând cele două expresii obținute pentru necunoscuta  $y$ , obținem o ecuație care conține numai necunoscuta  $x$  (am eliminat pe  $y$ ).

Sistemul devine

$$\begin{cases} y = \frac{c - ax}{b} \\ \frac{c - ax}{b} = \frac{c' - a'x}{b'}, \quad b \neq 0; \quad b' \neq 0. \end{cases}$$

Rezolvăm ecuația a doua.

$$ba'x - ab'x = bc' - cb'.$$

Scoatem valoarea lui  $x$ :

$$x = \frac{bc' - cb'}{ba' - ab'}$$

$$y = \frac{c - a \cdot \frac{bc' - cb'}{ba' - ab'}}{b},$$

$$y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'}.$$

Soluția sistemului:

$$\begin{cases} x = \frac{bc' - cb'}{ba' - ab'} \\ y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'} \end{cases}$$

$$a'b - ab' \neq 0.$$

Exemple. 1) 
$$\begin{cases} x - 14y = -4 \\ 3x + 2y = 32. \end{cases}$$

Este mai ușor să rezolvăm în raport cu  $x$  fiecare ecuație.

$$\begin{cases} x = 14y - 4 \\ x = \frac{32 - 2y}{3}. \end{cases}$$

Deci:

$$\begin{cases} x = 14y - 4 \\ 14y - 4 = \frac{32 - 2y}{3}. \end{cases} \quad \text{Am egalat expresiile care-l conțin pe } x \text{ în funcție de } y.$$

$$\begin{cases} x = 14y - 4 \\ 42y + 2y = 32 + 12 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 14y - 4 \\ 44y = 44 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 14 - 4 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Soluția sistemului: 
$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 1. \end{cases}$$

2) 
$$\begin{cases} \frac{5x + 7y}{3x + 11} = \frac{13}{7} \\ \frac{11x + 27}{7x + 5y} = \frac{19}{11} \end{cases}.$$

Eliminăm numitorii sau, fiecare ecuație fiind o proporție, folosim proprietatea fundamentală a proporțiilor.

Sistemul devine:

$$\begin{cases} 7(5x + 7y) = 13(3x + 11) & \text{dacă } 3x + 11 \neq 0 \\ 11(11x + 27) = 19(7x + 5y) & \text{dacă } 7x + 5y \neq 0. \end{cases}$$

Desfacem parantezele și separăm termenii.

$$\begin{cases} -4x + 49y = 143 \\ -12x - 95y = -297. \end{cases}$$

Rezolvăm ecuațiile în raport cu  $x$ :

$$\begin{cases} x = \frac{49y - 143}{4} \\ x = \frac{297 - 95y}{12}. \end{cases}$$

Egalînd cele două expresii obţinem sistemul:

$$\begin{cases} x = \frac{49y - 143}{4} \\ \frac{49y - 143}{4} = \frac{297 - 95y}{12}; \end{cases}$$

$$3(49y - 143) = 297 - 95y,$$

$$147y + 95y = 297 + 429,$$

$$242y = 726, \quad y = \frac{726}{242}, \quad y = 3.$$

Sistemul devine:

$$\begin{cases} x = \frac{49y - 143}{4} \\ y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{147 - 143}{4} \\ y = 3. \end{cases}$$

Soluţia sistemului:  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3. \end{cases}$

**Observare.** Un sistem de două ecuaţii de gradul I cu două necunoscute are aceeaşi soluţie, indiferent de metoda pe care am folosit-o pentru rezolvare.

Vom alege metoda care ne conduce la calcule mai simple.

Dacă coeficienţii uneia din necunoscute sînt egali, este preferabil să folosim metoda reducerii sau metoda comparaţiei.

Dacă o ecuaţie este rezolvată în raport cu o necunoscută, este preferabil să folosim metoda substituţiei. De exemplu, sistemul  $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x - 15y = -43 \end{cases}$  se poate rezolva mai uşor prin substituţie.

### Discuţia sistemului de două ecuaţii de gradul I cu două necunoscute

Sistemul  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

are soluţia:  $\begin{cases} x = \frac{bc' - cb'}{ba' - ab'} \\ y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'}. \end{cases}$

$x$  şi  $y$  sînt date de fracţii (care au acelaşi numitor). Pentru ca fracţiile să aibă sens (sistemul să admită o soluţie şi numai una) trebuie ca numitorul să fie diferit de zero.

1) Dacă  $ba' - ab' \neq 0$  sistemul este determinat, are soluţie unică.

Relaţia  $ba' - ab' \neq 0$  se mai scrie  $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ . Deci, dacă coeficienţii necunoscutelor nu sînt proporţionali, soluţia există şi este unică.

2) Dacă  $ba' - ab' = 0$  sau  $\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'}$  (coeficienții necunoscutelor sînt proporționali), există două cazuri:

$$1^\circ bc' - cb' \neq 0$$

$$(ca' - ac' \neq 0); \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}. \quad \text{Sistemul de ecuații nu are soluție.}$$

2°  $bc' - cb' = 0$ . Sistemul are o infinitate de soluții; cele două ecuații se reduc ( $ca' - ac' = 0$ ) la una singură.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

### Exemple

$$1) \quad \begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ 6x + 10y = 16 \end{cases} \quad \text{sau în general} \quad \begin{cases} ax + by = c \\ kax + kby = kc. \end{cases}$$

Ecuațiile se reduc la o singură ecuație cu două necunoscute dacă împărțim ambii membri ai ecuației a doua a celor două sisteme respectiv cu 2 sau  $k$ . Sistemul este nedeterminat; are o infinitate de soluții.

$$2) \quad \begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ 6x + 10y = 10 \end{cases} \quad \text{sau în general} \quad \begin{cases} ax + by = c \\ kax + kby = c' \quad (c' \neq ck). \end{cases}$$

Sistemele devin

$$1') \quad \begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ 3x + 5y = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} ax + by = c \\ ax + by = \frac{c'}{k} \quad \left(\frac{c'}{k} \neq c\right). \end{cases}$$

Sistemele sînt imposibile căci aceeași expresie  $3x + 5y$  respectiv  $ax + by$  nu poate să ia două valori diferite 8 și 5 respectiv  $c$  și  $\frac{c'}{k} \neq c$ . Sistemul nu are soluție.

Dacă încercăm să rezolvăm sistemul (1) obținem:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ -3x - 5y = -8 \end{cases}$$

Ecuațiile sînt verificate pentru orice valori date necunoscutelor  $x$  și  $y$ .

Dacă încercăm să rezolvăm sistemul (2) obținem,

$$2') \quad \begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ -3x - 5y = -5. \end{cases}$$

$0 \cdot x + 0 \cdot y = 3$ ; ceea ce nu este posibil pentru că 0 nu poate fi egal cu 3.

**Concluzie.** Un sistem de două ecuații de gradul I cu două necunoscute este determinat (are o soluție și numai una) dacă coeficienții necunoscutelor din cele două ecuații nu sînt proporționali; este nedeterminat (are o infinitate de soluții) dacă coeficienții necunoscutelor și termenii liberi sînt proporționali  $\left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\right)$ ; este



imposibil dacă coeficienții necunoscutelor sînt proporționali dar termenii liberi formează un raport diferit de raportul coeficienților uneia din necunoscute  $\left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}\right)$ .

Sistemele cu ecuații literale se rezolvă prin aceleași metode ca și cele cu coeficienți numerici.

Exemple.

$$1) \quad \begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ x + y = 2a \end{cases} \quad | \quad b$$

Sistemul are forma normală.

Eliminăm pe  $y$

$$\begin{cases} ax - by = a^2 + b^2 \\ bx + by = 2ab. \end{cases} \quad \text{Adunăm membru cu membru ecuațiile.}$$

$$x(a + b) = a^2 + b^2 + 2ab,$$

deci  $x = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a + b}$ . Simplificînd fracția cu  $a + b \neq 0$ ,

$$x = (a + b)$$

Sistemul (1) se înlocuiește cu sistemul echivalent

$$\begin{cases} x = a + b \\ x + y = 2a \end{cases} \quad \begin{matrix} y = 2a - x, \\ y = 2a - a - b, \end{matrix} \quad \begin{matrix} y = a - b. \end{matrix}$$

Soluția sistemului:

$$\begin{cases} x = a + b \\ y = a - b. \end{cases}$$

Verificare.

Prima ecuație: I)  $a(a + b) - b(a - b) = a^2 + ab - ab + b^2$ ; II)  $a^2 + b^2$ .

A doua ecuație: I)  $a + b + a - b = 2a$ ; II)  $2a$ .

$$2) \quad \begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b} \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b} \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} (a-b)x + (a+b)y = a+b \\ (a-b)x - (a+b)y = a-b. \end{cases}$$

Sistemul (2) are forma normală. Adunînd și scăzînd membru cu membru cele două ecuații obținem:

$$x = \frac{a}{a-b}; \quad y = \frac{b}{a+b}.$$

Pentru ca ecuația să aibă sens trebuie ca  $a \neq b$  și  $a \neq -b$ .

*Observare.* Putem rezolva sistemul 2) fără să aducem la același numitor căci coeficienții lui  $y$  ( $\frac{1}{a-b}$  și  $-\frac{1}{a-b}$ ) sînt numere opuse. Adunăm membru cu membru cele două ecuații.

$$\frac{2x}{a+b} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}; \quad \frac{2x}{a+b} = \frac{a+b+a-b}{(a-b)(a+b)},$$

de unde:

$$\boxed{x = \frac{a}{a-b}}.$$

Scăzînd cele două ecuații membru cu membru obținem:

$$\frac{2y}{a-b} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}; \quad \frac{2y}{a-b} = \frac{2b}{(a-b)(a+b)} \text{ deci } y = \frac{b}{a+b}.$$

Soluția sistemului: 
$$\begin{cases} x = \frac{a}{a-b} \\ y = \frac{b}{a+b} \end{cases}$$

Verificare.

Prima ecuație: membrul I este  $\frac{a}{(a-b)(a+b)} + \frac{b}{(a-b)(a+b)} = \frac{1}{a-b};$

membrul II este  $\frac{1}{a-b}.$

A doua ecuație: membrul I este  $\frac{a}{(a-b)(a+b)} - \frac{b}{(a-b)(a+b)} = \frac{1}{a+b};$

membrul II este:  $\frac{1}{a+b}.$

3) 
$$\begin{cases} a(x+y) = a + b(x-y) \\ (a^2 - b^2)x + b^2y = a^2(1-y) \end{cases} \text{ necunoscutele sînt } x \text{ și } y.$$

Aducem ecuațiile la forma normală, desfacem parantezele (dacă e cazul) și separăm termenii.

$$\begin{cases} ax + ay - bx + by = a \\ (a^2 - b^2)x + b^2y + a^2y = a^2 \end{cases}$$

Strîngem termenii în  $x$  și  $y$ .

$$\begin{cases} (a-b)x + (a+b)y = a \\ (a^2 - b^2)x + (a^2 + b^2)y = a^2 \end{cases} \quad | - (a+b).$$

Eliminăm pe  $x$ . Multiplul comun al coeficienților lui  $x$  este  $a^2 - b^2$ .

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -(a^2 - b^2)x - (a+b)^2y = -a^2 - ab \\ (a^2 - b^2)x + (a^2 + b^2)y = a^2 \end{cases} \\ & (a^2 + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab)y = -ab \\ & -2aby = -ab, \quad y = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sistemul devine 
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ (a-b)x + (a+b)y = a \end{cases}$$

de unde:

$$(a-b)x = a - \frac{1}{2}(a+b); \quad (a-b)x = \frac{a-b}{2}$$

Soluția sistemului: 
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Verificare. Prima ecuație: membrul I este  $a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = a$ ;

membrul II este  $a + b\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = a$ .

A doua ecuație: membrul I este  $(a^2 - b^2)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}b^2 = \frac{a^2}{2}$ ;

membrul II este  $a^2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a^2$ .

### Ecuații și sisteme care se rezolvă prin procedee speciale

Unele sisteme pot fi rezolvate mai ușor folosind anumite procedee de calcul după specificul exercițiului

*Exemple.*

1) Sistemul 
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

nu-l putem rezolva în această etapă de studiu prin procedeul obișnuit căci, prin eliminarea numitorului, obținem câte un termen de gradul II în  $xy$ .

Vom introduce două necunoscute ajutătoare notînd  $\frac{1}{x} = u$ ,  $\frac{1}{y} = v$  și vom rezolva sistemul în  $u$  și  $v$  obținut.

$$\begin{cases} u + v = \frac{7}{12} \\ 2u - 3v = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} \times 3 \\ \hline \end{matrix} \quad \begin{cases} 3u + 3v = \frac{7}{4} \\ 2u - 3v = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$5u = \frac{5}{4}, \quad u = \frac{1}{4}$$

Sistemul devine:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{4} \\ u + v = \frac{7}{12} \text{ de unde } v = \frac{7}{12} - \frac{1}{4}, v = \frac{5}{12}, v = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Calculăm necunoscutele inițiale.

$$\frac{1}{x} = u, \quad x = \frac{1}{u}, \quad x = 4.$$

$$\frac{1}{y} = v, \quad y = \frac{1}{v}, \quad y = 3.$$

$x = 4$  și  $y = 3$  verifică ecuația inițială.

2) Să se rezolve ecuația

$$\frac{a(x - b^2) + b(a^2 - x)}{a(x - b^2) - b(a^2 - x)} = \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}.$$

Putem efectua mai ușor calculele dacă observăm că ecuația este de forma  $\frac{A+B}{A-B} = \frac{C}{D}$  deci o proporție și putem aplica proprietățile scriind proporția derivată

$$\frac{A+B+A-B}{A+B-A+B} = \frac{C+D}{C-D}; \quad \frac{2A}{2B} = \frac{C+D}{C-D}.$$

În cazul nostru ecuația devine

$$\frac{a(x - b^2)}{b(a^2 - x)} = \frac{2a^3}{-2b^3}, \text{ sau împărțind prin } \frac{2a}{2b} \text{ în ambii membri } \left(\frac{a}{b} \neq 0\right),$$

$$\frac{x - b^2}{a^2 - x} = -\frac{a^2}{b^2} \text{ de unde (pentru } x \neq a^2)$$

$$(b^2 - a^2)x = b^4 - a^4, \quad x = \frac{b^4 - a^4}{b^2 - a^2}, \quad x = \frac{(b^2 - a^2)(b^2 + a^2)}{b^2 - a^2} \text{ (presupunem } b^2 - a^2 \neq 0),$$

$$x = a^2 + b^2.$$

Verificare. Membrul I:  $\frac{a \cdot a^2 - b \cdot b^3}{a \cdot a^2 - b(-b^2)} = \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$ ; membrul II:  $\frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$ .

$$3) \begin{cases} \frac{2}{x+y} + \frac{7}{x-y} = \frac{5}{3} \\ \frac{4}{x+y} - \frac{9}{x-y} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Folosim procedeul indicat la sistemul 1). Introducem necunoscutele ajutătoare  $\frac{1}{x+y} = u, \frac{1}{x-y} = v$  ( $x+y \neq 0, x-y \neq 0$ ).



Sistemul în  $u$  și  $v$  va fi:

$$\begin{cases} 2u + 7v = \frac{5}{3} \\ 4u - 9v = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} -2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{cases} -4u - 14v = -\frac{10}{3} \\ 4u - 9v = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\hline -23v = -\frac{23}{6}, \quad v = \frac{1}{6}$$

Sistemul devine

$$\begin{cases} 2u + 7v = \frac{5}{3} \\ v = \frac{1}{6} \end{cases} \quad 2u = \frac{5}{3} - \frac{7}{6}, \quad 2u = \frac{3}{6}, \quad u = \frac{1}{4}.$$

Soluția sistemului ajutător

$$\begin{cases} u = \frac{1}{4} \\ v = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Sistemul dat va avea aceeași soluție ca sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{x-y} = \frac{1}{6} \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x+y=4 \\ x-y=6 \end{cases}$$

$$\hline 2x=10 \quad x=5$$

$$y=4-5 \quad y=-1.$$

Soluția:  $\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$

### Sisteme de trei ecuații cu trei necunoscute

Pentru a rezolva un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute căutăm să eliminăm — prin una din metodele cunoscute de la sistemul de două ecuații — una din necunoscute adică să formăm un sistem echivalent în care două ecuații să conțină numai două din necunoscute (aceleași).

*Exemple*

1)  $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 28 \\ 3x + 2y - 5z = 16 \\ 2x + y - 3z = 10 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \\ 3 \\ -2 \end{array}$

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 28 \\ 6x + 3y - 9z = 30 \\ \hline 10x - 7z = 58 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 16 \\ -4x - 2y + 6z = -20 \\ \hline -x + z = -4 \end{cases}$$

Eliminăm de exemplu pe  $y$  din prima și ultima ecuație, apoi din ultimele două. Obținem două ecuații în  $x$  și  $z$  care împreună cu una din ecuațiile sistemului dat formează un sistem echivalent.

$$\begin{cases} 10x - 7z = 58 \\ -x + z = -4 \\ 2x + y - 3z = 10. \end{cases} \quad | \begin{matrix} \\ 7 \\ \end{matrix}$$

Din primele două ecuații îl eliminăm pe  $z$  și obținem:

$$\begin{aligned} 3x = 30, \quad x = 10 \quad \text{apoi} \quad z = -4 + 10, \quad z = 6. \\ y = 10 + 3z - 2x, \quad y = 10 + 18 - 20, \quad y = 8. \end{aligned}$$

Soluția sistemului: 
$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 8 \\ z = 6. \end{cases}$$

Același sistem se putea rezolva prin metoda substituției. De exemplu, scoatem valoarea lui  $y$  din a treia ecuație și o înlocuim în primele două. Sistemul devine:

$$\begin{cases} y = 10 + 3z - 2x \\ 4x - 30 - 9z + 6x + 2z = 28 \\ 3x + 20 + 6z - 4x - 5z = 16 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} y = 10 + 3z - 2x \\ 10x - 7z = 58 \\ -x + z = -4. \end{cases}$$

Același sistem la care am ajuns și prin prima metodă.

$$2) \quad \begin{cases} 2x + 5y + 4z = 17 \\ 3x + 2y - z = 2 \\ 5x + 3y - 2z = 2 \end{cases} \quad | \begin{matrix} \\ 4 \\ -2 \end{matrix}$$

Eliminăm pe  $z$  din primele două ecuații apoi din ultimele două.

Obținem sistemul echivalent:

$$\begin{cases} 14x + 13y = 25 \\ -x - y = -2 \\ 3x + 2y - z = 2 \end{cases} \quad | \begin{matrix} \\ 14 \\ 13 \end{matrix} \quad \begin{aligned} (13 - 14)y &= 25 - 28; & y &= +3; \\ (14 - 13)x &= 25 - 26, & x &= -1. \end{aligned}$$

Calculăm  $z$  din ultima ecuație

$$z = 3x + 2y - 2; \quad z = -3 + 6 - 2; \quad z = 1.$$

Soluția: 
$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 3. \\ z = 1 \end{cases}$$

Folosind metoda substituției, obținem același rezultat:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} z = 3x + 2y - 2 \\ 2x + 5y + 12x + 8y - 8 = 17 \\ 5x + 3y - 6x - 4y + 4 = 2 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} z = 3x + 2y - 2 \\ 14x + 13y = 25 \\ -x - y = -2. \end{cases} \\ 3) \quad &\begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 7. \\ z + x = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Sistemul se rezolvă ușor prin metodele cunoscute. Putem folosi însă și un alt procedeu. Observăm că adunând membru cu membru, în partea întâi, obținem:  $2(x + y + z)$ ; deci se poate găsi valoarea sumei.  $x + y + z$ . Scăzând succesiv suma a câte două necunoscute, se determină  $x, y, z$ .

$$\begin{aligned} 2(x + y + z) &= 18, & x + y + z &= 9 \\ z &= 9 - 5, & z &= 4 \\ x &= 9 - 7, & x &= 2 \\ y &= 9 - 6, & y &= 3. \end{aligned}$$

Verificarea se face imediat în sistemul dat.

$$4) \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{12} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{3}{4} \end{cases} \quad (x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0).$$

Procedând ca în exemplul precedent obținem

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) &= \overset{2)}{\frac{5}{6}} + \overset{3)}{\frac{7}{12}} + \frac{3}{4} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{13}{12} \quad \text{deci} \quad \begin{cases} \frac{1}{z} = \frac{13}{12} - \frac{10}{12} \\ \frac{1}{x} = \frac{13}{12} - \frac{7}{12} \\ \frac{1}{y} = \frac{13}{12} - \frac{9}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{z} = \frac{1}{4}; & z = 4 \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{2}; & x = 2 \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{3}; & y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$5) \quad \begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{12}{5} \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{18}{5} \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{36}{13} \end{cases} \quad (x+y \neq 0; y+z \neq 0; x+z \neq 0).$$

Dacă eliminăm numitorii ajungem la un sistem care conține termeni de gradul II ( $xy, yz, xz$ ).

Putem aduce sistemul la o formă cunoscută considerând în fiecare proporție rapoartele inversate

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{5}{12} \\ \frac{y+z}{yz} = \frac{5}{18} \\ \frac{x+z}{xz} = \frac{13}{36} \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{5}{12} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{5}{18} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{13}{36} \end{cases}$$

Folosim procedeul din exemplul precedent

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{15 + 10 + 13}{36}$$

$$\text{Din } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{19}{36}.$$

prin scăderi succesive obținem sistemul:

$$\begin{cases} \frac{1}{z} = \frac{19}{36} - \frac{15}{36} \\ \frac{1}{x} = \frac{19}{36} - \frac{10}{36} \\ \frac{1}{y} = \frac{19}{36} - \frac{13}{36} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{z} = \frac{4}{36}; & \frac{1}{z} = \frac{1}{9} \text{ deci } z = 9 \\ \frac{1}{x} = \frac{9}{36}; & \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \text{ deci } x = 4 \\ \frac{1}{y} = \frac{6}{36}; & \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \text{ deci } y = 6. \end{cases}$$

Soluția sistemului.  $\begin{cases} x = 4 \\ y = 6. \\ z = 9 \end{cases}$

### III. Ecuația de gradul II

Forma canonică a ecuației de gradul II cu o necunoscută este:  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Pentru ca ecuația să fie de gradul II trebuie ca  $a \neq 0$ .

Forme incomplete ale ecuației de gradul II.

1°)  $b = 0, c \neq 0, ax^2 + c = 0,$

2°)  $c = 0, b \neq 0, ax^2 + bx = 0,$

3°)  $c = 0, b = 0, ax^2 = 0.$

A rezolva ecuația de gradul al doilea înseamnă a găsi valorile necunoscutei care verifică ecuația (soluțiile sau rădăcinile ecuației).

Rezolvarea ecuației  $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

1) Cazuri particulare

1)  $ax^2 + c = 0, ax^2 = -c, x^2 = -\frac{c}{a}.$

Căutăm soluțiile în mulțimea numerelor reale  $\left(-\frac{c}{a} \geq 0\right)$ .  $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$  (Pătratele a două numere reale opuse sînt egale). Ecuația are soluție numai dacă  $-\frac{c}{a} \geq 0$ . Dacă ecuația are forma  $a^2x^2 - b^2 = 0$ , putem descompune membrul întii în factori  $(ax + b)(ax - b) = 0$ , de unde:  $ax + b = 0, x_1 = -\frac{b}{a}$  sau  $ax - b = 0, x_2 = \frac{b}{a}$ .



### Exemple

a)  $9x^2 - 16 = 0$ . Descompunem membrul întâi

$(3x - 4)(3x + 4) = 0$ . Un produs este nul dacă și numai dacă unul din factori este nul deci

$$3x - 4 = 0 \quad \text{sau} \quad 3x + 4 = 0, \text{ care ne dau soluțiile}$$

$$x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{Verificare. } 9\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 16 = 16 - 16 = 0,$$

$$9\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 16 = 16 - 16 = 0.$$

$$\text{b) } 9x^2 - 7 = 0,$$

$$(3x - \sqrt{7})(3x + \sqrt{7}) = 0; \quad 3x - \sqrt{7} = 0 \text{ și } 3x + \sqrt{7} = 0 \quad x = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

c)  $4x^2 + 9 = 0$  nu are soluție căci  $4x^2$  este pozitiv pentru orice valoare reală a lui  $x$  și o sumă de două numere pozitive nu poate fi nulă.

$$\text{d) } -16x^2 + 25 = 0.$$

$$(5 - 4x)(5 + 4x) = 0 \quad \text{de unde } 5 - 4x = 0 \text{ sau } 5 + 4x = 0.$$

$$x_1 = \frac{5}{4}; \quad x_2 = -\frac{5}{4}.$$

2)  $ax^2 + bx = 0$ . Descompunem membrul întâi.

$$x(ax + b) = 0. \quad \text{Anulăm fiecare factor.}$$

$$x = 0, \quad ax + b = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

### Exemple

$$\text{a) } 5x^2 - 2x = 0; \quad x(5x - 2) = 0.$$

$$x = 0, \quad 5x - 2 = 0.$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2}{5}.$$

$$\text{b) } 3x^2 + 7x = 0; \quad x(3x + 7) = 0$$

$$x = 0, \quad 3x + 7 = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{7}{3}.$$

$$\text{3) } ax^2 = 0 \text{ se poate scrie } a \cdot x \cdot x = 0 \quad (a \neq 0)$$

deci  $x = 0$  și  $x = 0$  avem două rădăcini (o rădăcină dublă) egale cu zero.

$$x_1 = x_2 = 0$$

4)  $(ax + b)^2 = 0$  are rădăcina dublă

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{a}.$$

*Exemple*

a)  $4x^2 - 4x + 1 = 0.$

Membrul întâi este un pătrat perfect:  $(2x - 1)^2 = 0$  deci  $(2x - 1)(2x - 1) = 0.$

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}.$$

b)  $9x^2 + 12x + 4 = 0$  sau

$$(3x + 2)^2 = 0 \quad \text{deci } (3x + 2)(3x + 2) = 0.$$

$$x_1 = x_2 = -\frac{2}{3}.$$

5)  $(ax + b)^2 = c^2$

sau  $(ax + b)^2 - c^2 = 0$  Descompunem în factori

$$(ax + b + c)(ax + b - c) = 0 \quad \text{de unde}$$

$$ax + b + c = 0 \quad \text{sau} \quad ax + b - c = 0.$$

$$x_1 = -\frac{b + c}{a}, \quad x_2 = \frac{c - b}{a}.$$

**Ecuatia de forma**  $ax^2 + bx + c = 0$ .  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$ .

Vom aduce ecuația la forma precedentă căutând să scoatem în evidență un binom în  $x$  la pătrat. Împărțim ambii membri ai ecuației cu  $a$  (pentru a obține termenul în  $x^2$  un pătrat perfect)

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0.$$

Formăm binomul care prin ridicare la pătrat să cuprindă primii termeni  $\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right).$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}.$$

$$\text{Ecuatia devine: } \left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right) = 0$$

de unde:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \text{ sau}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ cu condiția } b^2 - 4ac \geq 0.$$

Dacă  $b^2 - 4ac > 0$ , rădăcinile ecuației

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ sînt reale și distincte.}$$

Dacă  $b^2 - 4ac = 0$ ,  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$  (reale confundate).

Dacă  $b^2 - 4ac < 0$ , ecuația nu are rădăcini reale.

*Exemple*

1)  $3x^2 - 10x + 8 = 0$ . Împărțim cu 3:

$$x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{8}{3} = 0. \text{ Separăm un pătrat perfect:}$$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} + \frac{8}{3} = 0; \quad \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} = 0;$$

$$\left(x - \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0.$$

$$\text{Deci } x = \frac{5}{3} \pm \frac{1}{3} \text{ de unde}$$

$$x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = 2.$$

Dacă aplicăm formula găsită,  $a = 3$ ,  $b = -10$ ,  $c = 8$ ,

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{6}, \quad x = \frac{10 \pm 2}{6} \text{ deci}$$

$$x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = 2.$$

Verificarea se face în ecuația dată.

$$2) \frac{20 + x}{2x - 2} - \frac{9x^2 + x + 2}{6x^2 - 6} = \frac{5 - 3x}{x + 1} - \frac{10 - 4x}{3x + 3}.$$

Pentru ca fracțiile să aibă sens trebuie ca  $x^2 - 1 \neq 0$  deci  $x \neq \pm 1$ .

Aducem ecuația la forma normală. Eliminăm numitorii înmulțind prin c.m.m.m.c. al lor în ambii membri ai ecuației. Numitorul comun

$$\begin{array}{l|l} 2x - 2 = 2(x - 1) & 3x + 3 \\ 6x^2 - 6 = 2 \cdot 3(x - 1)(x + 1) & 1 \\ x + 1 = x + 1 & 6x - 6 \\ 3x + 3 = 3(x + 1) & 2x - 2 \\ \hline \text{c.m.m.m.c.} = 2 \cdot 3(x - 1)(x + 1) = 6(x^2 - 1). \end{array}$$

Eliminăm numitorul înmulțind ambii membri ai ecuației cu  $6(x^2 - 1)$ .

$$(3x + 3)(20 + x) - (9x^2 + x + 2) = (6x - 6)(5 - 3x) - (10 - 4x)(2x - 2).$$

Desfacem parantezele.

$$60x + 60 + 3x^2 + 3x - 9x^2 - x - 2 = 30x - 30 - 18x^2 + 18x - 20x + 8x^2 + 20 - 8x.$$

Strângem termenii asemenea în fiecare membru (pentru a ușura calculele).

$$-6x^2 + 62x + 58 = -10x^2 + 20x - 10.$$

Separăm termenii și strângem termenii asemenea în același timp.

$$4x^2 + 42x + 68 = 0. \text{ Rezolvăm ecuația fără ajutorul formulei.}$$

Separăm un pătrat perfect

$$\left(2x + \frac{21}{2}\right)^2 - \frac{441}{4} + 68 = 0;$$

$$\left(2x + \frac{21}{2}\right)^2 - \frac{169}{4} = 0, \quad \left(2x + \frac{21}{2}\right)^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^2 = 0.$$

Descompunem în factori:

$$\left(2x + \frac{21}{2} + \frac{13}{2}\right)\left(2x + \frac{21}{2} - \frac{13}{2}\right) = 0$$

$$2x + 17 = 0, \quad 2x + 4 = 0$$

$$x_1 = -\frac{17}{2}, \quad x_2 = -2.$$

Rezolvăm aceeași ecuație cu ajutorul formulei.

$$4x^2 + 42x + 68 = 0. \quad \text{Împărțim ambii membri cu 2}$$

$$2x^2 + 21x + 34 = 0.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad a = 2, \quad b = 21, \quad c = 34.$$

$$x = \frac{-21 \pm \sqrt{441 - 272}}{2}, \quad x = \frac{-21 \pm \sqrt{169}}{4},$$

$$x = \frac{-21 \pm 13}{4}; \quad x_1 = \frac{-21 + 13}{4}; \quad x_2 = \frac{-21 - 13}{4}$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -\frac{17}{2}.$$

Verificarea se face în ecuația dată.

$$\text{Pentru } x = -2 \text{ membrul I este } \frac{18}{-6} - \frac{36 - 2 + 2}{18} = -3 - 2 = -5;$$

$$\text{membrul II este } \frac{11}{-1} - \frac{10 + 8}{-3} = -11 + 6 = -5.$$

$$\text{Pentru } x = -\frac{17}{2} \text{ membrul I este } \frac{20 - \frac{17}{2}}{-17 - 2} - \frac{9 \cdot \frac{289}{4} - \frac{17}{2} + 2}{\frac{6 \cdot 19 \cdot 15}{4}} = -\frac{19}{9};$$

$$\text{membrul II este } \frac{5 + \frac{3 \cdot 17}{2}}{-\frac{15}{2}} - \frac{10 + 34}{3 \cdot \left(-\frac{15}{2}\right)} = -\frac{19}{9}.$$



*Observare.* În cazul  $b$  număr par  $b = 2b'$ . Formula de rezolvare a ecuației  $ax^2 + bx + c = 0$  devine

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a}$$

Dînd pe 2 factor comun,

$$x = \frac{2(-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac})}{2a} \left( \text{în care } b' \text{ este } \frac{b}{2} \right),$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

*Exemplu.*

$$5x^2 - 4x - 1 = 0.$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 5}}{5}, \quad x = \frac{2 \pm 3}{5}.$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{5}.$$

Dacă  $a = 1$  și  $b$  număr par  $b = 2b'$ , formula devine:

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - c}}{1}.$$

*Exemplu.*

$$x^2 - 6x + 8 = 0.$$

$$x = 3 \pm \sqrt{9 - 8}, \quad x = 3 \pm 1.$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 2.$$

## VIII Inegalități

Două numere reale  $a$  și  $b$  pot fi:

- 1) egale,  $a = b$ ,
- 2) diferite,  $a \neq b$ , când  $a > b$  sau  $b > a$ .

Două numere sau două expresii algebrice legate prin semnele  $>$  sau  $<$  formează o inegalitate. Cele două expresii se numesc: partea stângă sau membrul întâi al inegalității, și partea dreaptă sau membrul doi al inegalității. Semnele  $\geq$  (mai mare sau cel puțin egal) și  $\leq$  (mai mic sau cel mult egal) sînt și ele des folosite.

*Exemple.*  $-2 > -3$ ;  $2 < 4$ ,  $a^2 - 2ab + b^2 > 0$ ,  $a \neq b$ .

Inegalitățile adevărate pentru orice valori date literelor se numesc inegalități propriu-zise. De exemplu:  $a^2 + b^2 \geq 0$  (o sumă de două pătrate de numere reale este totdeauna pozitivă sau zero; va fi egală cu zero numai în cazul  $a = b = 0$ ).  $(a - b)^2 \geq 0$  (un pătrat perfect al unui număr real este totdeauna pozitiv sau zero dacă  $a = b$ ).

O inegalitate de forma  $E_1(x) < E_2(x)$  sau  $E_1(x) \leq E_2(x)$  care nu se verifică pentru toate valorile date lui  $x$  este o *inecuație cu o necunoscută*.

A rezolva o inecuație înseamnă a determina mulțimea valorilor pentru care inecuația este verificată.

Rezolvarea unei inecuații cu o necunoscută se reduce la una din formele:  $x > a$ ,  $x < a$ ;  $x \geq a$ ;  $x \leq a$ .

Dacă reprezentăm numărul  $a$  pe axa  $xx'$  a numerelor reale prin punctul  $A$  atunci

- 1)  $x > a$  este satisfăcută de toate numerele reale reprezentate la dreapta punctului  $A$  deci de mulțimea numerelor corespunzătoare punctelor semidreptei  $Ax$  (fără punctul  $A$ ) — semiaxă deschisă la stînga (fig. 9).
- 2)  $x < a$  este satisfăcută de toate numerele reale corespunzătoare punctelor semidreptei  $Ax'$  fără punctul  $A$ ) — semidreaptă deschisă la dreapta (fig. 8).
- 3)  $x \geq a$  este satisfăcută de toate numerele reale corespunzătoare punctelor semidreptei  $Ax$  (inclusiv  $A$ ) — semidreaptă închisă la stînga (fig. 10,a).

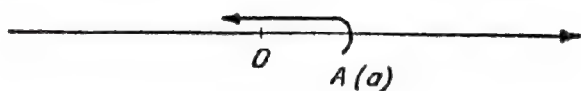


Fig. 8



Fig. 9

4)  $x \leq a$  este satisfăcută de toate numerele reale corespunzătoare punctelor semidreptei  $Ax'$  (inclusiv  $A$ ) — semidreaptă închisă la dreapta (fig. 10, b).

Mulțimea punctelor semidreptei deschise  $Ax$  se notează  $(a, +\infty)$ . Dacă  $x > a$  atunci  $x \in (a, +\infty)$ .

Mulțimea punctelor semidreptei deschise  $Ax'$  se notează  $(-\infty, a)$ . Dacă  $x < a$  atunci  $x \in (-\infty, a)$ .

Mulțimea punctelor semidreptei închise  $Ax$  se notează  $[a, +\infty)$ . Dacă  $x \geq a$  atunci  $x \in [a, +\infty)$ .

Mulțimea punctelor semidreptei închise  $Ax'$  se notează  $(-\infty, a]$ . Dacă  $x \leq a$  atunci  $x \in (-\infty, a]$ .

Semidreptele  $(a, +\infty)$  sau  $(-\infty, a)$  se mai numesc intervale deschise nemărginite la dreapta respectiv la stînga.

Semidreptele  $[a, +\infty)$  sau  $(-\infty, a]$  sînt intervale închise respectiv la stînga sau la dreapta.

Prin interval închis  $[a, b]$  vom înțelege mulțimea punctelor cuprinse între punctele  $A$  și  $B$  inclusiv punctele  $A$  și  $B$  corespunzătoare numerelor  $a$  respectiv  $b$ .

$$x \in [a, b] \text{ înseamnă } a \leq x \leq b$$

$x$  cuprins între  $a$  și  $b$  putînd lua și valorile  $a$  și  $b$

$x \in (a, b)$  înseamnă  $a < x < b$  adică  $x$  este cuprins între  $a$  și  $b$  fără a lua valorile  $a$  sau  $b$ .

Exemple. 1)  $x \in (2, 5)$  înseamnă  $2 < x < 5$ ;

$x$  este cuprins între 2 și 5 (mai mare decît 2 și mai mic decît 5)

2)  $x \in [3, 7)$  înseamnă  $3 \leq x < 7$ ;

$x$  este mai mare sau cel puțin egal cu 3 și mai mic decît 7.

3)  $x \in (-5, -1]$  înseamnă  $-5 < x \leq -1$ ;

$x$  mai mare decît  $-5$  și mai mic sau cel mult egal cu  $-1$ .

4)  $x \in [-2, 1]$  înseamnă  $-2 \leq x \leq 1$ ;

$x$  mai mare sau cel puțin egal cu  $-2$  și mai mic sau cel mult egal cu 1.

Numim inecuații echivalente inecuațiile satisfăcute de aceeași mulțime de valori.

## Proprietățile inecuațiilor

### Inegalități numerice

1. Dacă adunăm (scădem) același număr în ambele părți ale unei inegalități, inegalitatea își păstrează sensul.

Exemplu.  $5 > -1$

$$5 + 1 > -1 + 1; 6 > 0$$

$$5 - 2 > -1 - 2; 3 > -3.$$

### Inecuații

1. Dacă adunăm (scădem) în ambii membri ai unei inecuații același număr obținem o inecuație echivalentă.

Consecință. Într-o inecuație putem trece un termen dintr-o parte în alta a inecuației cu semnul schimbat și obținem o inecuație echivalentă.

2. Dacă înmulțim (împărțim) ambii membri ai unei inegalități cu un număr diferit de zero, atunci:

- 1) dacă numărul este pozitiv sensul inegalității se păstrează;
- 2) dacă numărul este negativ inegalitatea își schimbă sensul

*Exemple.* Din  $14 > 12$  obținem:

$$14 \cdot 2 > 12 \cdot 2; 14 : 2 > 12 : 2; 7 > 6;$$

$$14 \cdot (-2) < 12 \cdot (-2); -28 < -24;$$

$$14 : (-2) < 12 : (-2); -7 < -6.$$

2. Dacă înmulțim (împărțim) ambii membri ai unei inecuații cu același număr diferit de zero atunci obținem o inecuație echivalentă de același sens dacă numărul este pozitiv și de sens contrar dacă numărul este negativ.

*Exemple.* Din  $x > 3$  obținem inecuațiile:

$$2x > 6; -2x < -6;$$

$$\frac{x}{2} > \frac{3}{2}; -\frac{x}{2} < -\frac{3}{2}.$$

care sînt inecuații echivalente.

*Consecință.*

Într-o inecuație de forma  $ax > b$  dacă împărțim ambii membri cu  $a$  atunci:

$$x > \frac{b}{a} \text{ dacă } a > 0; \quad x < \frac{b}{a} \text{ dacă } a < 0$$

De exemplu:

1) dacă  $5x > 10$ , atunci  $x > 2$

2) dacă  $-5x > 10$ , atunci  $x < -2$ .

3. Dacă adunăm parte cu parte două inegalități de același sens obținem tot o inegalitate de același sens.

*Exemplu.*

$$3 > 2$$

$$\begin{array}{r} -4 > -5 \\ \hline -1 > -3. \end{array}$$

*Consecință.* Dacă dintr-o inegalitate de un anumit sens scădem o inegalitate de sens contrar obținem o inegalitate de același sens cu prima.

*Exemple.*

1)  $5 > 3;$       2)  $-5 < -3;$       3)  $-1 < 3$

$$\begin{array}{r} -2 < 1 \\ \hline 7 > 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 > 1 \\ \hline -7 < -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -5 > -7 \\ \hline 4 < 10. \end{array}$$

Rezolvarea inecuațiilor de gradul I cu o necunoscută se bazează pe proprietățile inecuațiilor echivalente.

*Exemple.*

$$\begin{array}{l} 1) \quad 6x + 10 > 34 \\ \quad 6x > 34 - 10 \\ \quad 6x > 24 \end{array}$$

$$x > 4.$$

Trecem termenii liberi în membrii doi.

Împărțim ambii membri ai inecuației cu  $6 > 0$  deci



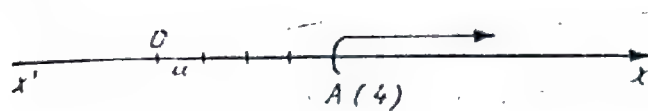


Fig. 11

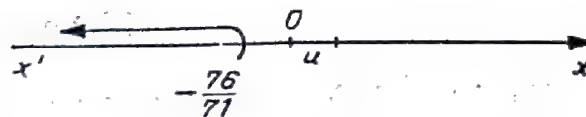


Fig. 12

sau (fig. 11)  $x \in (4, +\infty)$ .

$$2) \frac{3-2x}{5} + 8 < \frac{5x+2}{2} - 10x. \quad \text{Aducem la același numitor (10).}$$

$$\frac{6-4x+80}{10} < \frac{25x+10-100x}{10}.$$

$$6-4x+80 < 25x+10-100x.$$

$$-4x-25x+100x < 10-6-80.$$

$$71x < -76.$$

$$x < -\frac{76}{71} \text{ sau}$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{76}{71}\right) \text{ (fig. 12).}$$

$$3) 2x+1 \geq 5x-9.$$

$$2x-5x \leq -9-1.$$

$$-3x \geq -10.$$

$$x \leq \frac{10}{3} \text{ sau}$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{10}{3}\right] \text{ (fig. 13).}$$

$$4) 1 - \frac{5-x}{7} \leq 3x - \frac{2+x}{21}.$$

$$\frac{21-15+3x}{21} \leq \frac{63x-2-x}{21}.$$

$$21-15+3x \leq 63x-2-x.$$

$$3x-63x+x \leq -2-21+15.$$

$$-59x \leq -8.$$

$$x \geq \frac{8}{59} \text{ sau}$$

$$x \in \left[\frac{8}{59}, +\infty\right) \text{ (fig. 14).}$$

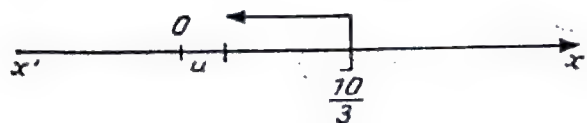


Fig. 13



Fig. 14

Înmulțim cu 10 ( $10 > 0$ ) în ambii membri.

Separăm termenii care conțin necunoscuta în membrul I.

Strângem termenii asemenea.

Împărțim în ambii membri cu 71 ( $71 > 0$ ).

Separăm termenii care conțin necunoscuta.

Împărțim cu  $-3$  ( $-3 < 0$ ) și schimbăm sensul inegalității.

Aducem la același numitor (21).

Înmulțim cu 21 ( $21 > 0$ ).

Separăm termenii care conțin necunoscuta.

Strângem termenii asemenea.

Împărțim ambii membri cu  $-59$  ( $-59 < 0$ ) și schimbăm sensul inegalității.

## Sisteme de inecuații

Un sistem de inecuații cu o necunoscută este format din două sau mai multe inecuații cu aceeași necunoscută.

Pentru a rezolva un sistem de inecuații rezolvăm inecuațiile sistemului în mod succesiv. Soluția sistemului este dată de mulțimea elementelor comune mulțimilor soluțiilor inecuațiilor care formează sistemul adică de intersecția acestor mulțimi.

La rezolvarea unui sistem de două inecuații cu o necunoscută se poate ajunge numai la una din următoarele cazuri:

$$1) \quad \begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases} \quad \text{și } a < b \text{ (fig. 15).}$$

Dacă  $x$  trebuie să fie mai mare decât două numere va fi mai mare decât cel mai mare dintre aceste numere (se vede și pe figură). Deci soluția  $x > b$ . Această mulțime este mulțimea dată de intersecția intervalelor  $(a, +\infty) \cap (b, +\infty)$ ;

$$(a, +\infty) \cap (b, +\infty) = (b, +\infty) \text{ dacă } a < b; x \in (b, +\infty).$$

$$2) \quad \begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases} \quad \text{și } a < b \text{ (fig. 16).}$$

$$\text{Deci } x \in (-\infty, a) \cap (-\infty, b) = (-\infty, a) \\ \text{sau } x < a.$$

Dacă  $x$  trebuie să fie mai mic decât două numere date el este mai mic decât cel mai mic din cele două numere.

$$3) \quad \begin{cases} x < b \\ x > a \end{cases} \quad \text{și } a < b,$$

$$x \in (-\infty, b) \cap (a, +\infty) = (a, b) \text{ sau} \\ a < x < b.$$

Fiind date două numere  $a, b$  astfel ca  $a < b$ , dacă  $x$  trebuie să fie mai mare decât  $a$  și mai mic decât  $b$  atunci el este cuprins între aceste două numere.

$$4) \quad \begin{cases} x > b \\ x < a \end{cases} \quad \text{și } a < b \text{ (fig. 17).}$$

$$x \in (b, +\infty) \cap (-\infty, a) = \emptyset \text{ (mulțimea vidă).}$$

Fiind date două numere  $a, b$  astfel ca  $a < b$  nu există nici un număr care să fie mai mare decât  $b$  și mai mic decât  $a$ .

Sistemul este imposibil, nu are soluții. Mulțimea soluțiilor este mulțimea vidă.

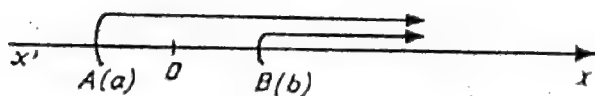


Fig. 15

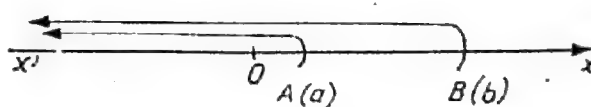


Fig. 16

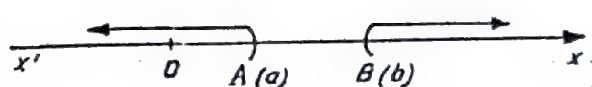


Fig. 17

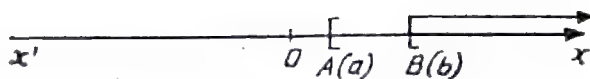


Fig. 18

Inecuațiile pot cuprinde și semnele  $\geq$  ;  $\leq$  .

*Exemple.*

1)  $\begin{cases} x \geq a \\ x \geq b \end{cases}$  și  $a < b$  rezultă  $x \in [b, +\infty)$  (fig. 18).

2)  $\begin{cases} x \leq a \\ x \leq b \end{cases}$  și  $a < b$  rezultă  $x \in (-\infty, a]$  (fig. 19).

3)  $\begin{cases} x \leq b \\ x \geq a \end{cases}$  și  $a < b$  rezultă  $x \in [a, b]$  (fig. 20).

4)  $\begin{cases} x \leq b \\ x > a \end{cases}$   $a < b$  rezultă  $x \in (a, b]$  (fig. 21).

*Exemple.*

1)  $\begin{cases} 1 - \frac{5-x}{3} < 2 - \frac{3x}{2} \\ \frac{2x-1}{3} < \frac{3-x}{4} \end{cases}$

Aducem inecuațiile la forma normală:

Aducem la același numitor; apoi îl eliminăm înmulțind ambii membri ai inecuațiilor cu numitorul respectiv (număr pozitiv).

$$\begin{cases} \frac{6-10+2x}{6} < \frac{12-9x}{6} \\ \frac{8x-4}{12} < \frac{9-3x}{12} \end{cases} \quad \begin{cases} -4+2x < 12-9x \\ 8x-4 < 9-3x \end{cases}$$

Separăm termenii:

$$\begin{cases} 11x < 16 \\ 11x < 13 \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{16}{11} \\ x < \frac{13}{11} \end{cases}$$

Soluție:  $x < \frac{13}{11}$  sau  $x \in (-\infty, \frac{13}{11})$  (fig. 22).

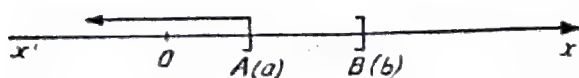
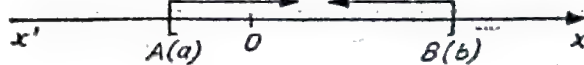


Fig. 19



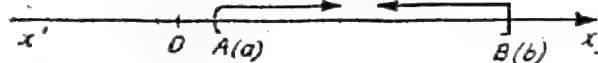


Fig. 21

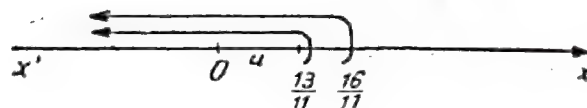


Fig. 22

$$2) \begin{cases} \frac{2-3x}{5} - 3(2-x) < 7 - \frac{1+5x}{3} \\ 4 - \frac{2-2x}{7} \geq 3 + \frac{5x}{7} \end{cases}$$

Aducem inecuațiile la același numitor și eliminăm numitorii (numere pozitive).

$$\begin{cases} 6 - 9x - 45(2-x) < 105 - 5 - 25x, \\ 28 - 2 + 2x \geq 21 + 5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 - 9x - 90 + 45x < 100 - 25x \\ -3x \geq -5 \end{cases}$$

Împărțind cu  $-3 < 0$  ambii membri ai inecuației, sensul se schimbă.

$$\begin{cases} 61x < 184 \\ x \leq \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < \frac{184}{61} \\ x \leq \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3\frac{1}{61} \\ x \leq 1\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$x \leq \frac{5}{3}, \quad x \in \left(-\infty, \frac{5}{3}\right] \text{ (fig. 23).}$$

$$3) \begin{cases} 7(2-3x) - 5(1-4x) \geq 1 - 4x + 3(2-x). \\ \frac{1-x}{5} - 1 > 1 - \frac{3x-1}{4} + 3x. \end{cases}$$

Eliminăm numitorii (numere pozitive) și desfacem parantezele.

$$\begin{cases} 14 - 21x - 5 + 20x \geq 1 - 4x + 6 - 3x \\ 4 - 4x - 20 > 20 - 15x + 5 + 60x \end{cases}$$

Separăm termenii:

$$\begin{cases} 6x \geq -2 \\ -49x > 41 \end{cases}$$

Împărțim cu coeficientul necunoscutului.  
Prima inecuație își păstrează sensul ( $6 > 0$ ), a doua își schimbă sensul ( $-49 < 0$ ).

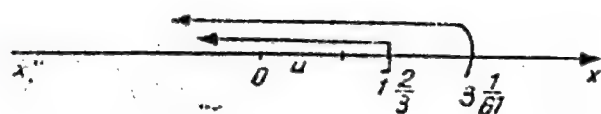


Fig. 23

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x < -\frac{41}{49} \end{cases} \text{ (fig. 24).}$$



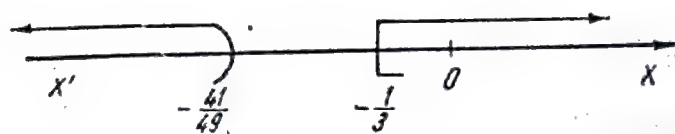


Fig. 24



Fig. 25

Sistemul nu are soluție, este imposibil.

*Observare.* Fiecare inecuație în parte are soluții dar mulțimile  $(-\infty, -\frac{41}{49})$  și  $[-\frac{1}{3} + \infty)$  sînt disjuncte cum se vede și pe figură.

$$4) \begin{cases} 5x - 2 + \left(\frac{x-1}{3}\right) < 1 - \frac{1-x}{3} \\ 2x - 1 + \frac{3}{5}(1-x) \leq 2 + 3x \end{cases}$$

Eliminăm numitorii (numere pozitive) și desfacem parantezele

$$\begin{cases} 15x - 6 + x - 1 < 3 - 1 + x \\ 10x - 5 + 3 - 2x \leq 10 + 15x \end{cases}$$

Separăm termenii:

$$15x < 9,$$

$$x < \frac{3}{5},$$

$$-8x \leq 12$$

$$x \geq -\frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2} \leq x < \frac{3}{5}$$

$$\text{sau } x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right) \quad (\text{fig. 25.})$$

# IX

## Funcții

1) Polinomul  $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ , în care  $n$  este număr natural și coeficienții  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  numere reale este o funcție definită pe mulțimea numerelor reale cu valori în mulțimea numerelor reale.

Dacă  $a_0 \neq 0$  polinomul este de gradul  $n$ .

Noi vom studia numai funcțiile-polinom de gradul I și de gradul al II-lea.

2) Funcția  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , unde  $P(x)$  și  $Q(x)$  sînt polinoame, se numește funcție rațională. Ea este definită pe mulțimea numerelor reale în afară de valorile care anulează numitorul (rădăcinile reale ale ecuației  $Q(x) = 0$ ).

Dintre funcțiile raționale vom studia funcția

$$f(x) = \frac{k}{x}, \quad k \in R, \quad x \in R - \{0\}.$$

Funcția  $f(x) = \frac{k}{x}$  ia valori în mulțimea numerelor reale.

*Observare.* Pentru două valori oarecare  $x_1, x_2$  ( $x_1 \neq x_2$ ) corespund  $y_1$  și  $y_2$ :

$$y_1 = \frac{k}{x_1}, \quad y_2 = \frac{k}{x_2} \quad \text{de unde}$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\frac{k}{x_1}}{\frac{k}{x_2}} \quad \text{sau} \quad \frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1}.$$

Deci  $y = \frac{k}{x}$  exprimă dependența invers proporțională a două mărimi.

### Funcții monotone

*Definiții.* a) Funcția  $y = f(x)$  definită pe un interval  $I$  este crescătoare pe  $I$  dacă pentru orice pereche de valori  $x_1 < x_2$  din acest interval, corespund valorile funcției  $f(x_1), f(x_2)$  astfel că

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

b) Funcția  $y = f(x)$  definită pe un interval  $I$  este descrescătoare pe  $I$  dacă pentru orice valori  $x_1 < x_2$  din acest interval corespund valorile funcției  $f(x_1), f(x_2)$  astfel ca

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

c) Funcțiile crescătoare sau descrescătoare pe un interval  $I$  se numesc funcții monotone pe intervalul  $I$ .

*Exemple.*

Funcția  $y = ax + b$  este o funcție monotonă pe toată axa numerelor reale (domeniu de definiție) și anume este crescătoare dacă  $a > 0$  și descrescătoare dacă  $a < 0$ .

În adevăr, pentru orice  $x_1 < x_2$ ,  $f(x_1) = ax_1 + b$ ,  $f(x_2) = ax_2 + b$ .

Comparăm valorile funcțiilor prin diferența lor.

$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2).$$

Dar  $x_1 - x_2 < 0$  deci:

$f(x_1) - f(x_2) < 0$  dacă  $a > 0$ ; funcția este crescătoare.

$f(x_1) - f(x_2) > 0$  dacă  $a < 0$ ; funcția este descrescătoare.

Funcțiile

$$y = -2x + 5 \quad \text{și} \quad y = \frac{1}{2}x + 3$$

sînt monotone. Acest lucru se poate urmări în tabelul:

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$3$	$5$	$+\infty$							
$y = -2x + 5$	$\searrow$	9	$\searrow$	7	$\searrow$	5	$\searrow$	3	$\searrow$	$-1$	$\searrow$	$-5$	$\searrow$	$a = -2$	funcție descrescătoare
$y = \frac{1}{2}x + 3$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$\frac{7}{2}$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$\frac{11}{2}$	$\nearrow$	$a = \frac{1}{2}$	funcție crescătoare

Pentru prima funcție

$y_1 - y_2 = -2(x_1 - x_2)$ . Dacă  $x_1 - x_2 < 0$ , atunci

$y_1 - y_2 > 0$ ; funcția  $y = -2x + 5$  este descrescătoare.

Pentru a doua funcție

$y_1 - y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$ . Dacă  $x_1 - x_2 < 0$ , atunci

$y_1 - y_2 > 0$ ; funcția  $y = \frac{1}{2}x + 3$  este crescătoare.

Funcția  $y = ax^2$  definită pe mulțimea numerelor reale este monotonă pe intervalele  $(-\infty, 0]$  și  $[0, +\infty)$ .

Dacă  $a > 0$  funcția este descrescătoare când  $x \in (-\infty, 0]$  și crescătoare când  $x \in [0, +\infty)$ .

Dacă  $a < 0$ , funcția este crescătoare când  $x \in (-\infty, 0]$  și descrescătoare când  $x \in [0, +\infty)$ .

Pentru orice  $x_1 < x_2 < 0, x \in (-\infty, 0]$ ,

$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1^2 - x_2^2),$$

$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2).$$

Dar în condițiile date ( $x_1 < x_2 < 0$ ),  $x_1 - x_2 < 0$ ,  $x_1 + x_2 < 0$ , deci  $(x_1 - x_2) \times (x_1 + x_2) > 0$  și

1)  $f(x_1) - f(x_2) > 0$  (dacă  $a > 0$ ); funcția este descrescătoare,

2)  $f(x_1) - f(x_2) < 0$  (dacă  $a < 0$ ); funcția este crescătoare.

Pentru orice  $0 < x_1 < x_2, x \in [0, +\infty)$ ,

$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ . Dar în acest caz  $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0$ , deci:

1)  $f(x_1) - f(x_2) < 0$  (dacă  $a > 0$ ); deci funcția este crescătoare,

2)  $f(x_1) - f(x_2) > 0$  (dacă  $a < 0$ ); deci funcția este descrescătoare.

Funcțiile  $y = -x^2$  și  $y = x^2$

sînt monotone pe fiecare din intervalele  $(-\infty, 0]$  și  $[0, +\infty)$ .

Tabelul următor ilustrează variația funcțiilor.

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$+\infty$							
$y = -x^2$	$\nearrow$	$-9$	$\nearrow$	$-4$	$\nearrow$	$-1$	$\nearrow$	$0$	$\searrow$	$-1$	$\searrow$	$-4$	$\searrow$	$-9$	$\searrow$	funcție crescătoare cînd $x \in (-\infty, 0]$ , funcție descrescătoare cînd $x \in [0, +\infty)$ .
$y = x^2$	$\searrow$	$9$	$\searrow$	$4$	$\searrow$	$1$	$\searrow$	$0$	$\nearrow$	$1$	$\nearrow$	$4$	$\nearrow$	$9$	$\nearrow$	funcție descrescătoare cînd $x \in (-\infty, 0]$ , funcție crescătoare cînd $x \in [0, +\infty)$ .

Funcția  $y = \frac{k}{x}$ ,  $x \in R - \{0\}$   $R \in R - \{0\}$

este monotonă pentru  $x \in (-\infty, 0)$  și  $x \in (0, +\infty)$ .

Dacă  $k > 0$ ,  $y = \frac{k}{x}$  este descrescătoare pe cele două intervale.

Dacă  $k < 0$ ,  $y = \frac{k}{x}$  este crescătoare pe cele două intervale.

În adevăr, pentru orice  $x_1 < x_2 < 0$  sau  $0 < x_1 < x_2$ ,

$$f(x_1) - f(x_2) = k \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right),$$

$$f(x_1) - f(x_2) = k \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}.$$

Dar  $x_2 - x_1 > 0$  și  $x_1 x_2 > 0$  (produs de două numere de același semn).

Deci  $\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0$  și



1)  $f(x_1) - f(x_2) > 0$  (dacă  $k > 0$ ); funcția este descrescătoare;

2)  $f(x_1) - f(x_2) < 0$  (dacă  $k < 0$ ); funcția este crescătoare.

Funcțiile  $y = \frac{2}{x}$  și  $y = -\frac{1}{x}$  sînt monotone pentru  $x \in (-\infty, 0)$  și  $x \in (0, +\infty)$ .

Tabloul care urmează ilustrează afirmațiile:

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$+\infty$	
$y = \frac{2}{x}$		$\searrow -\frac{2}{3}$	$\searrow -1$	$\searrow -2$		$2 \searrow$	$1 \searrow$	$\frac{2}{3} \searrow$		$k = 2 > 0$
		descrescătoare				descrescătoare				
$y = -\frac{1}{x}$		$\nearrow \frac{1}{3}$	$\nearrow \frac{1}{2}$	$\nearrow 1$		$-1 \nearrow$	$-\frac{1}{2} \nearrow$	$-\frac{1}{3} \nearrow$		$k = -1 < 0$
		crescătoare				crescătoare				

### Reprezentarea grafică a funcțiilor.

#### Axe de coordonate

Considerăm axa numerelor reale  $x'x$  și axa  $y'y$  perpendiculară pe  $x'x$  în origine ( $O$ ). Aceste axe se mai numesc și axe ortogonale sau rectangulare. Sensul pozitiv se consideră pe  $x'x$  de la 0 la dreapta; pe  $y'y$  de la 0 în sus. Unitatea de măsură se fixează aceeași pentru ambele axe.

Un punct  $M$  (fig. 26) din planul acestor două axe ortogonale este determinat prin proiecțiile lui pe cele două axe  $M'$  fiind proiecția punctului  $M$  pe  $x'x$  și  $M''$  proiecția punctului  $M$  pe  $y'y$ . Punctul  $M$  este determinat de  $OM'$  (abscisa punctului  $M$ ) și  $OM''$  (ordonata punctului  $M$ ). Cum proiecția unui punct pe o axă este unică atunci și coordonatele (abscisa și ordonata) punctului sînt unice. Coordonatele punctului se scriu într-o paranteză, întîi abscisa apoi ordonata. De exemplu  $A(a, b)$  se citește  $A$  de coordonate  $a$  și  $b$ . Punctele axei  $x'x$  au ordonata 0 (zero). Punctele axei  $y'y$  au abscisa 0 (zero). Originea are ambele coordonate nule  $O(0, 0)$ .

Reciproc, fiind date coordonatele unui punct, se poate determina în planul axelor poziția unui punct. El se va găsi la intersecția perpendicularelor ridicate pe axe în punctele determinate de abscisă și ordonată. De exemplu,  $M(-2, 3)$ . Figurăm pe axa  $x'x$  punctul  $M'(-2, 0)$  pe axa  $y'y$  punctul  $M''(0, 3)$ ; ducem  $MM' \perp x'x$  și  $MM'' \perp y'y$ . Cele două perpendiculare au un singur punct de intersecție, punctul  $M$  (fig. 26).

Cele două axe împart planul în patru regiuni pe care le numim cadrane.

Semnele coordonatelor punctelor situate în diferite cadrane se pot urmări pe figura 27 și pe tabelul următor:

cadrantul	I	II	III	IV
abscisa	+	-	-	+
ordonata	+	+	-	-

Punctele  $M_1(2, 3)$  și  $M_2(2, -3)$  care au aceeași abscisă iar ordonatele, numere opuse, sînt simetrice față de axa  $x'x$ .

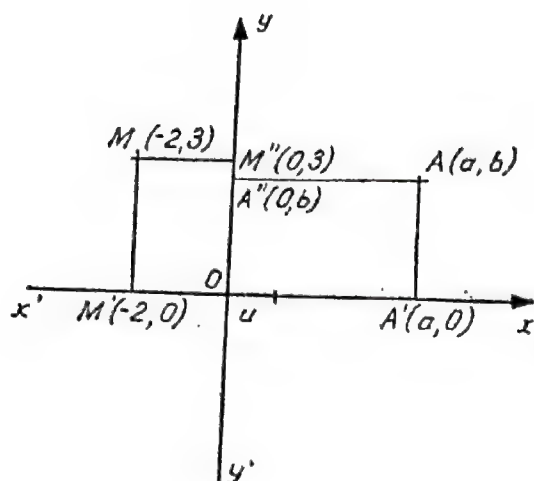


Fig. 26

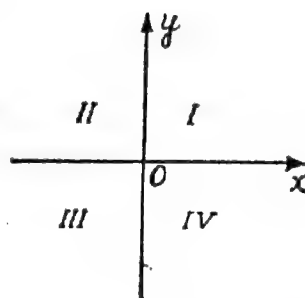


Fig. 27

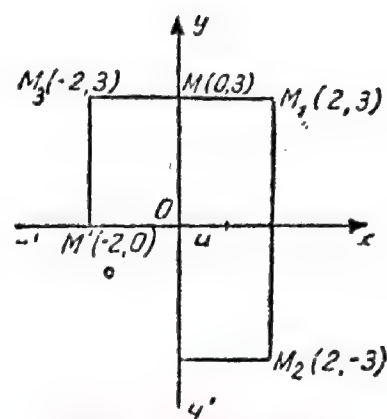


Fig. 28

Punctele  $M_1(2, 3)$  și  $M_3(-2, 3)$  care au aceeași ordonată iar abscisele, numere opuse, sînt simetrice față de axa  $y'y$ .

Punctele  $M_2(2, -3)$  și  $M_3(-2, 3)$  care au atît abscisele cît și ordonatele numere opuse sînt simetrice față de originea axelor (fig. 28).

**Concluzii.** Fiecare pereche ordonată de numere determină în planul axelor un punct și numai unul; fiecărui punct  $M$  din plan îi corespunde o pereche ordonată de numere și numai una singură ( $OM' = a$ ,  $OM'' = b$ ). La două puncte diferite  $M_1 \neq M_2$  corespund două perechi diferite de numere:  $(a_1, b_1)$ ,  $(a_2, b_2)$  în care avem cel puțin  $a_1 \neq a_2$  sau  $b_1 \neq b_2$ .

Dacă  $a_1 = a_2$  și  $b_1 = b_2$  cele două puncte sînt confundate. Între mulțimea punctelor din plan și mulțimea perechilor de numere reale, ordonate există o corespondență biunivocă.

**Graficul unei funcții.** Fiind dată o funcție  $f(x)$  definită pe mulțimea  $X$  cu valori în  $Y$ , mulțimea punctelor  $M[x, f(x)]$  cînd  $x$  parcurge mulțimea  $X$ , formează graficul funcției  $f(x)$ .

Pentru trasarea graficului figurăm cîteva puncte ale graficului și le unim printr-o linie (este bine să luăm și punctele graficului care se găsesc pe axe, dacă există).

Graficul funcției  $f(x)$ , definită pe  $I$ , este simetric față de axa  $y'y$  dacă pentru orice  $x \in I$ ,  $f(x) = f(-x)$ .

În acest caz funcția se numește *pară*.

În acest caz putem da lui  $x$  numai valori pozitive și apoi să determinăm și punctele simetrice corespunzătoare.

**Exemplu.**  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

$f(-x) = f(x)$  Dăm cîteva valori pozitive lui  $x$ .

$x$	0	1	2	3
$y = x^2$	0	1	4	9

Punctele  $O(0, 0)$ ;  $A(1, 1)$ ;  $B(2, 4)$ ;  $C(3, 9)$  și simetricele lor față de  $x'x$ ,  $A'(-1, 1)$ ;  $B'(-2, 4)$ ;  $C'(-3, 9)$ , sînt puncte ale graficului funcției  $f(x) = x^2$ .

Graficul funcției  $f(x)$  este simetric față de origine dacă pentru orice  $x \in X$  avem  $f(-x) = -f(x)$ , ( $-x \in X$ ). În acest caz funcția se numește *impară*.

Deci, dacă pentru două valori opuse ale lui  $x$  când se parcurge mulțimea de definiție corespund valori opuse pentru funcție, graficul este simetric față de origine.

*Exemplu.*  $f(x) = 2x$ ,  $x \in R$ ;  $f(x) \in R$ .

$$f(-x) = -2x, \quad f(-x) = -f(x).$$

$x$	0	1	2	3
$y = 2x$	0	2	4	6

Punctele  $O(0, 0)$ ;  $A(1, 2)$ ;  $B(2, 4)$ ;  $C(3, 6)$  și simetricele lor față de origine  $A'(-1, -2)$ ;  $B'(-2, -4)$ ;  $C'(-3, -6)$  sînt puncte ale graficului funcției  $f(x) = 2x$ .

### Funcția polinom de gradul I

$f(x) = ax$ ,  $a \neq 0$ , reprezintă o dreaptă ce trece prin origine.

Pentru  $x = 0$ ,  $y = a \cdot 0$ ,  $y = 0$ ,  $O(0, 0)$ .

Deci originea este un punct al graficului.

$$x = 1 \quad y = a \quad M_1(1, a)$$

$f(-x) = -f(x)$ , funcția este *impară*.

Orice alt punct  $M$  al graficului se găsește pe dreapta  $OM_1$  (fig. 29). Fie  $M$  de abscisă  $x_0$  și ordonată

$$y = ax_0; \quad M(x_0, ax_0).$$

Notăm  $M'$  și  $M'_1$  proiecțiile punctelor  $M$  și  $M_1$  pe axa  $x'x$ .

$$\triangle OM'_1M_1 \sim \triangle OMM' \text{ căci:}$$

$$\widehat{OM'_1M_1} = \widehat{OM'M} = 90^\circ,$$

$$\frac{OM'_1}{OM'} = \frac{M'_1M_1}{M'M}, \left( \frac{1}{x_0} = \frac{a}{ax_0} \right)$$

deci  $\widehat{M'_1OM_1} = \widehat{M'OM}$ .

Aceste două unghiuri egale avînd vîrful  $O$  și latura  $OM'$  comune și fiind așezate de aceeași parte a laturii comune, vor coincide.  $OM_1$  și  $OM$  au aceeași direcție. Punctul  $M$  se găsește pe dreapta  $OM_1$ .

Pentru reprezentarea graficului funcției  $f(x) = ax$  este deci suficient să figurăm un singur punct în afara originii (două puncte determină o dreaptă).

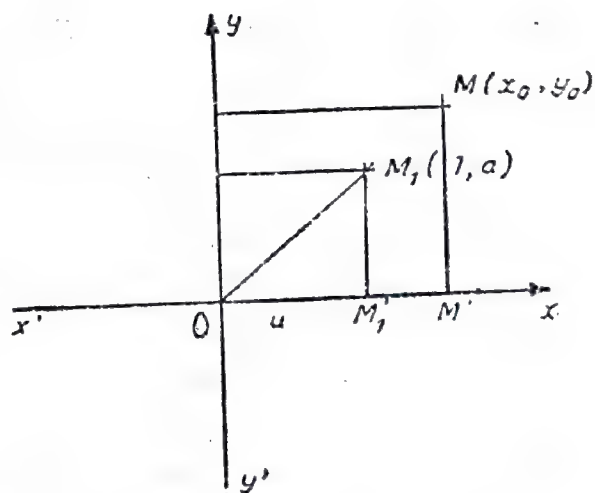


Fig. 29

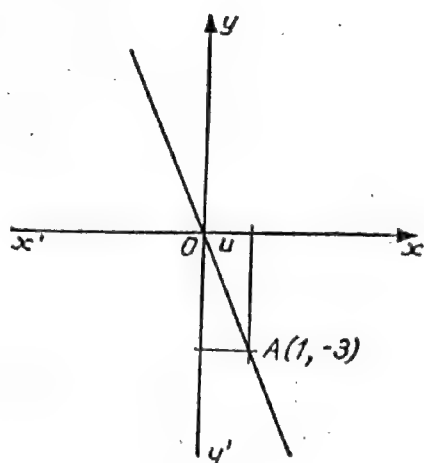


Fig. 30

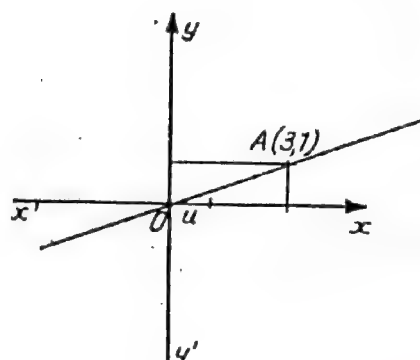


Fig. 31

Exemple. 1)  $f(x) = -3x$ ,

$$\begin{array}{ll} x = 0, & y = 0, & O(0, 0), \\ x = 1, & y = -3, & A(1, -3). \end{array}$$

Pe grafic se poate urmări că funcția este descrescătoare ( $a < 0$ ); graficul este simetric față de origine (fig. 30).

$$f(-x) = 3x; \quad f(x) = -f(-x).$$

$$2) \quad f(x) = \frac{1}{3}x.$$

$$\begin{array}{ll} x = 0, & y = 0, & O(0, 0) \\ x = 3, & y = 1, & A(3, 1). \end{array}$$

Funcție crescătoare ( $a > 0$ ); graficul simetric față de origine (fig. 31)

$$f(-x) = -\frac{1}{3}x, \quad f(x) = -f(-x).$$

$$F(x) = ax + b.$$

Formăm tabele pentru  $f(x) = ax$  și  $F(x) = ax + b$ .

$x$	-3	-2	0	1	3	5
$f(x) = ax$	$-3a$	$-2a$	0	$a$	$3a$	$5a$
$F(x) = ax + b$	$-3a + b$	$-2a + b$	$b$	$a + b$	$3a + b$	$5a + b$

Observăm că  $F(x_0)$  se obține din  $f(x_0)$  adăugind  $b$ . Deci ordonatele punctelor corespunzătoare aceleiași abscise diferă cu  $b$ .

Dar  $OC = AA_1 = BB_1 \dots$  și

$$OC \parallel AA_1 \parallel BB_1 \dots \quad (\text{fig. 32}).$$

Deci punctele  $A_1, C, B_1$  se găsesc pe o paralelă la dreapta  $OB$  deoarece:

- 1)  $CA_1 \parallel OA$  (patrulaterul  $OCA_1A$  este paralelogram și
- 2)  $CB_1 \parallel OB$  căci patrulaterul  $OCB_1B$  este paralelogram).



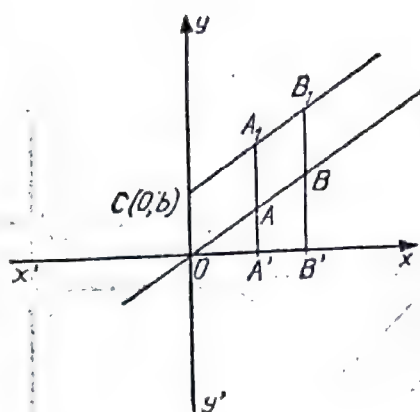


Fig. 32

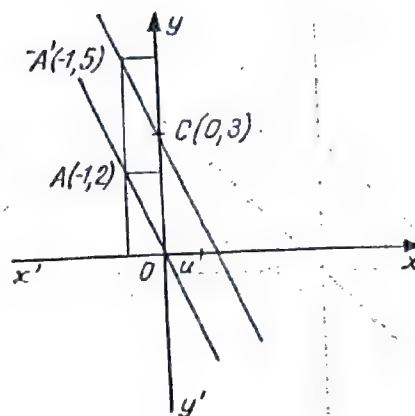


Fig. 33

Prin  $C$  nu se poate duce decît o singură paralelă la  $AD$  (postulatul lui Euclid).  
Deci  $B_1$  se găsește pe dreapta  $CA_1$ .

Exemple.  $f(x) = -2x + 3$ .

Reprezentăm  $g(x) = -2x$  și  $f(x) = -2x + 3$  (fig. 33).

$x$	$-1$	$0$
$g(x)$	$2$	$0$
$f(x)$	$5$	$3$

$A(-1,2)$ ,  $O(0,0)$ ,  
 $A'(-1,5)$ ,  $C(0,3)$ .

**Concluzie.** Pentru a reprezenta grafic funcția polinom de gradul I vom determina două puncte ale dreptei, dînd argumentului două valori arbitrare și calculăm valorile corespunzătoare ale funcției. Pentru ușurință e bine să luăm punctele în care dreapta taie axele de coordonate luînd  $x = 0$  și apoi valoarea care anulează pe  $f(x)$ .

Exemple. 1)  $f(x) = -5x + 3$

$A[x_1 = 0, f(x) = 3]$  (fig. 34),

$B[x_2 = -\frac{3}{5}, f(x) = 0]$ ,  $-5x - 3 = 0, x = -\frac{3}{5}$ .

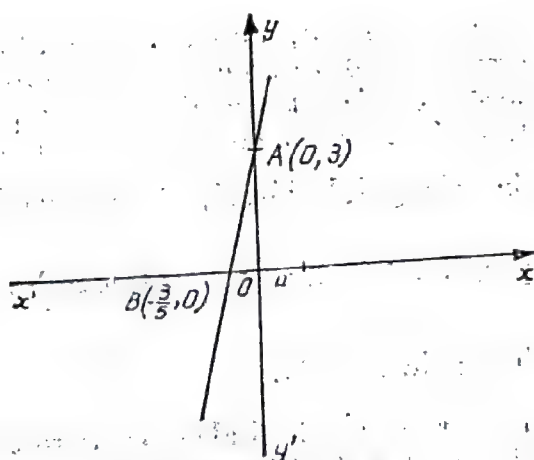


Fig. 34

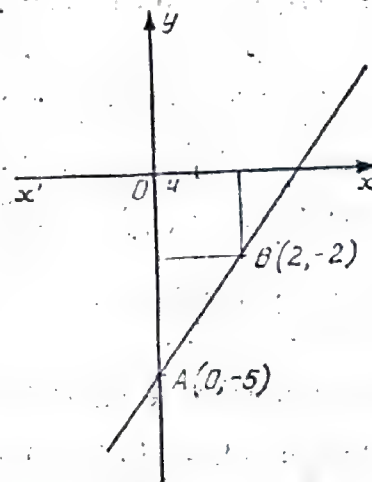


Fig. 35

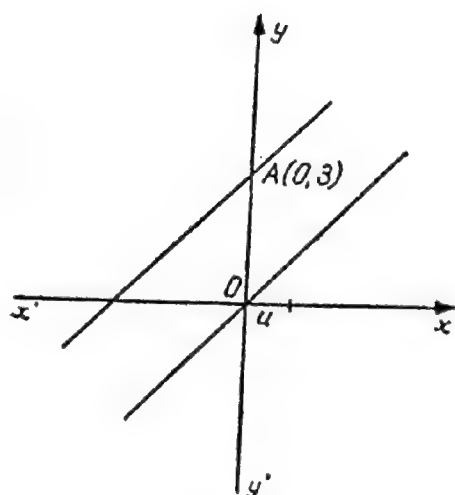


Fig. 36

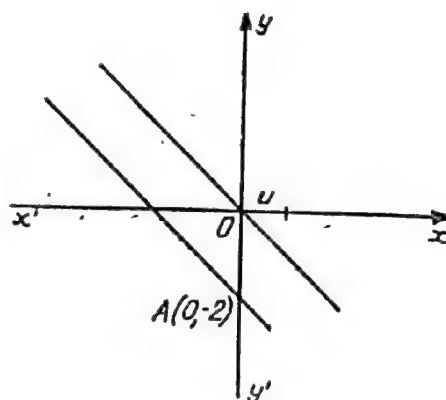


Fig. 37

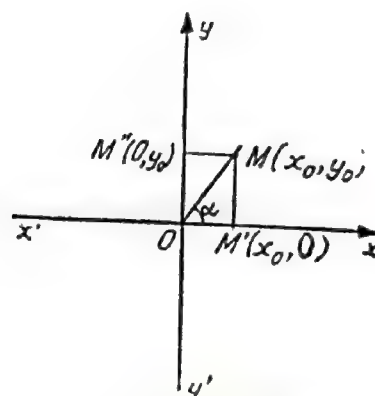


Fig. 38

$$2) f(x) = \frac{3}{2}x - 5.$$

$$A[x_1 = 0, f(x_1) = -5] \quad (\text{fig. 35}).$$

Pentru punctul  $B$  este preferabil să luăm  $x = 2$  (pentru a lucra cu numere întregi).  $B(2, -2)$ .

$$3) f(x) = x + 3.$$

$f_1(x) = x$  (reprezintă prima bisectoare a axelor, bisectoarea unghiului  $xOy$ , pentru că pentru orice  $x = x_0$  corespunde  $y = x_0$ ).

$f(x) = x + 3$  este o paralelă la prima bisectoare dusă prin  $A(0, +3)$  (fig. 36).

$$4) f(x) = -x - 2.$$

$f_1(x) = -x$  (reprezintă a doua bisectoare a axelor — bisectoarea exterioară a unghiului  $xOy$ ).

$f(x) = -x - 2$  reprezintă o paralelă la a doua bisectoare a axelor dusă prin  $A(0, -2)$  (fig. 37).

**Observări.** 1° Toate funcțiile de forma

$f(x) = ax + b$  unde  $a$  și  $b$  sînt numere reale ( $a \neq 0$ ), reprezintă drepte;  $b$  se numește ordonata la origine pentru că reprezintă ordonata punctului de intersecție cu axa  $y'y$  ( $x = 0$ ), coeficientul  $a$  se numește coeficient unghiular, el reprezintă tangenta unghiului pe care-l face semidreapta  $OM$  cu partea pozitivă a axei  $x'x$ . În adevăr pentru  $M(x_0, y_0)$  avem  $\frac{y_0}{x_0} = a$  dar în triunghiul  $OMM'$ ,  $\frac{y_0}{x_0} = \tan \alpha$  (fig. 38).

2° Toate punctele axei  $x'x$  se bucură de proprietatea că au ordonatele nule;  $y = 0$  reprezintă axa  $x'x$ .

$y = b$  reprezintă o paralelă la axa  $x'x$  dusă prin  $A(0, b)$ .

Toate punctele axei  $y'y$  se bucură de proprietatea că au abscisele nule;  $x = 0$  reprezintă axa  $y'y$ ,  $x = k$  reprezintă o paralelă la axa  $y'y$  dusă prin  $A(k, 0)$ .

### Interpretarea geometrică a unui sistem de două ecuații de gradul I, cu două necunoscute

Sistemul 
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

reprezintă în plan două drepte. Dacă  $b \neq 0$ ,  $b' \neq 0$ , putem scrie

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \\ y = -\frac{a'}{b'}x + \frac{c'}{b'} \end{cases}$$

Aceste două drepte pot fi:

a) *Concurente*, deci să aibă coeficienți unghiulari diferiți  $\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$  sau  $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ .

În acest caz sistemul este bine determinat și coordonatele  $(x_0, y_0)$  ale punctului de intersecție constituie soluția unică a sistemului.

b) *Paralele*, deci să aibă coeficienți unghiulari egali și ordonatele la origine diferite:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \text{ și } \frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'} \text{ sau } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}.$$

În acest caz sistemul este imposibil, nu are nici o soluție.

c) *Confundate*, deci coeficienții unghiulari sînt egali și ordonatele la origine, egale:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}; \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'} \text{ sau } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

În acest caz sistemul este nedeterminat, are o infinitate de soluții (perechile de numere care reprezintă coordonatele punctelor dreptei).

**Funcția**  $f(x) = ax^2$ .

a)  $f(x) = x^2$ ,  $x \in R$ ,  $f(x) \in R$ .

Observăm că  $f(x) = f(-x)$  căci  $f(-x) = (-x)^2$  curba este simetrică față de axa  $y'y$  (fig. 39).

Pentru orice valoare a lui  $x \in R$ ,  $f(x) \geq 0$ ; pentru  $x = 0$ ,  $f(x) = 0$ . Deci cea mai mică valoare pe care o ia  $f(x)$  este 0; spunem că funcția are un minim în punctul 0.

Tabel de câteva valori.

$x$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2$	4	1	$\frac{1}{4}$	0	1	4	9	16

**Observare.** Am putea considera pentru  $x$  numai valori pozitive apoi figurăm prin simetrie față de axa  $y'y$  curba și în partea stîngă a axei  $y'y$ .

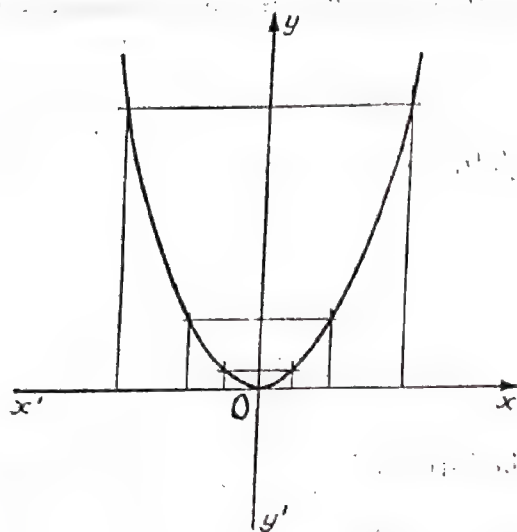


Fig. 39

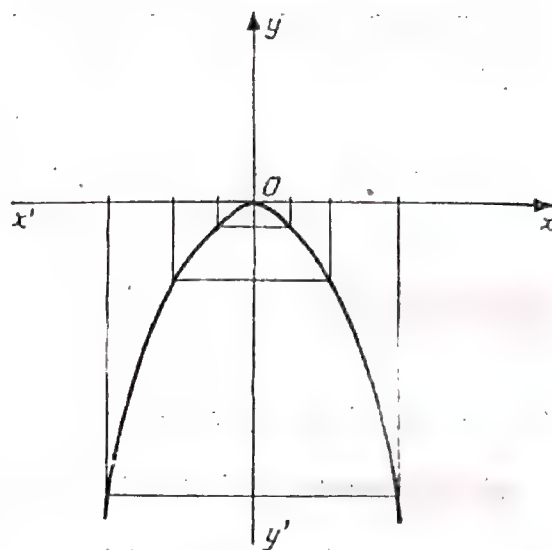


Fig. 40

În intervalul  $[0, +\infty)$  funcția este crescătoare, în intervalul  $(-\infty, 0]$  funcția este descrescătoare; curba are forma din figura 39 și se numește *parabolă*. Punctul de minim,  $O(0, 0)$  se numește *vîrf* parabolei.

b)  $f(x) = -x^2$ .

Aceleași observații ca și la funcția precedentă numai că pentru orice  $x \neq 0$ ,  $f(x) < 0$ . Pentru  $x = 0$ ,  $f(x) = 0$ . În  $O(0, 0)$  funcția are cea mai mare valoare, are un punct de maxim. Punctul  $O$  este *vîrf* parabolei.

$x$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	-9	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4	-9

Curba are forma din figura 40 și e simetrică față de  $y'y$ .

$$f(-x) = f(x).$$

În intervalul  $(-\infty, 0)$  funcția este crescătoare. În intervalul  $(0, +\infty)$  este descrescătoare.

c)  $f(x) = 2x^2$ .

Facem aceleași constatări ca în exemplele precedente

$f(x) = f(-x)$  funcția este simetrică față de  $Oy$ ; pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) > 0$ .

Pentru  $x = 0$ ,  $f(x)$  cea mai mică valoare; în  $O(0, 0)$  funcția are un *minim* (fig. 41).

d)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ .

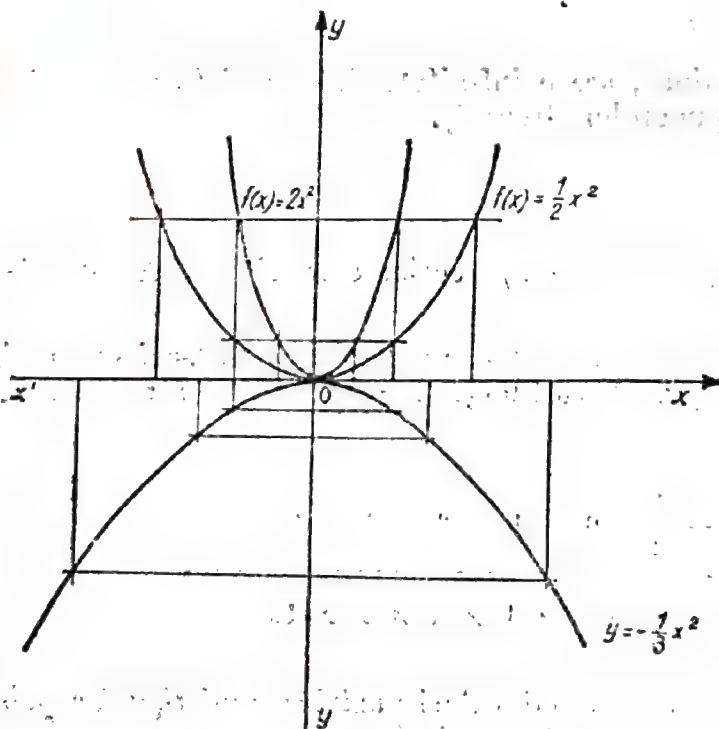


Fig. 41



$x$	0	1	2	3	4
$f(x) = \frac{1}{2}x^2$	0	$\nearrow \frac{1}{2}$	$\nearrow 2$	$\nearrow \frac{9}{2}$	$\nearrow 8$

În partea stângă vom construi curba prin simetrie (fig. 41).

c)  $f(x) = -\frac{1}{3}x^2$ .

$x$	0	+1	$\frac{3}{2}$	+3
$f(x) = -\frac{1}{3}x^2$	0	$\searrow -\frac{1}{3}$	$\searrow -\frac{3}{4}$	$\searrow -3$

**Concluzii.** 1) Funcția  $f(x) = ax^2$  reprezintă o curbă care are axa  $y'y$  ca axă de simetrie.

2) Punctul  $O$  este vârful parabolei. El este punct de maxim dacă  $a < 0$  sau punct de minim dacă  $a > 0$ .

3) Dacă  $a > 0$  funcția este descrescătoare în intervalul  $(-\infty, 0]$  și crescătoare în intervalul  $[0, +\infty)$ .

Dacă  $a < 0$  funcția este crescătoare în intervalul  $(-\infty, 0]$  și descrescătoare în intervalul  $[0, +\infty)$ .

4) Curba este deasupra axei  $x'x$  dacă  $a > 0$  și sub axa  $x'x$  dacă  $a < 0$ .

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$+\infty$
$y = ax^2, a > 0$	0	$\nearrow \frac{1}{4}a$	$\nearrow a$	$\nearrow 4a$	$\nearrow 9a$	$\nearrow +\infty$
$a < 0$	0	$\searrow +\frac{1}{4}a$	$\searrow +a$	$\searrow +4a$	$\searrow 9a$	$\searrow -\infty$

**Funcția rațională**  $f(x) = \frac{k}{x}$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ,  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

Dacă  $x$  ia valori pozitive foarte mici (din ce în ce mai apropiate de 0),  $f(x)$  crește foarte mult ( $f(x)$  tinde către  $+\infty$ ). Spunem că dreapta  $x=0$  este asimptotă\* la curbă.

Dacă  $x$  ia valori negative foarte mici în valoare absolută (din ce în ce mai apropiate de 0),  $f(x)$  crește foarte mult în valoare absolută și  $f(x) < 0$  ( $f(x)$  tinde la  $-\infty$ ). Funcția  $f(x) = \frac{1}{x}$  este funcție impară,  $f(x) = -f(-x)$  deci curba este simetrică față de origine.

\* O dreaptă se numește asimptotă la o curbă dacă distanța dintre dreaptă și curbă, măsurată pe verticală (sau pe orizontală) se micșorează din ce în ce (tinde către 0) când variabila  $x$  (sau variabila  $y$ ) în valoare absolută ia valori din ce în ce mai mari (tinde către  $+\infty$ ).

Variația funcției poate fi urmărită pe tabelul

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$+\infty$	
$f(x)$	$0$	$\times -\frac{1}{3}$	$\times -\frac{1}{2}$	$\times -1$	$\times -\infty$	$+\infty$	$\times 1$	$\times \frac{1}{2}$	$\times \frac{1}{3}$	$\times 0$

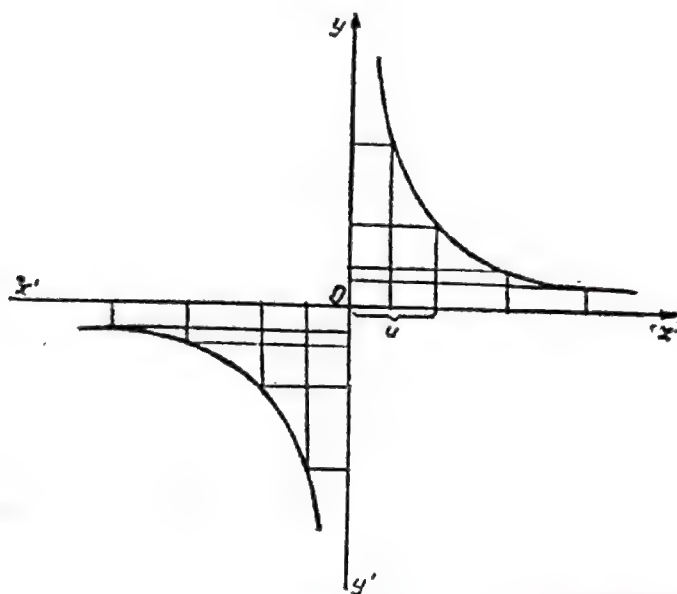


Fig. 42

Pentru a construi graficul, figurăm în planul axelor de coordonate  $x'x \perp y'y$  punctele obținute în tabel și le unim printr-o linie curbă (fig. 42). Curbă obținută este o hiperbolă.

$$b) f(x) = -\frac{2}{x},$$

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), f(x) \in \mathbb{R}.$$

$f(-x) = -f(x)$ . Funcția este impară deci curba este simetrică față de origine. Putem deci studia funcția numai pe intervalul  $(0, +\infty)$ .

Graficul funcției are axele de coordonate, asimptote.

Variația funcției se urmărește pe tabelul următor:

$x$	$0$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$1$
$f(x) = -\frac{2}{x}$	$-\infty$	$-16$	$-8$	$-4$	$-2$
	$2$	$4$	$8$	$32$	$+\infty$
	$\times -1$	$\times -\frac{1}{2}$	$\times -\frac{1}{4}$	$\times -\frac{1}{16}$	$\times 0$

Graficul se obține construind câteva puncte din tabel și simetricele lor față de origine apoi unind aceste puncte printr-o linie curbă (fig. 43).

De exemplu  $A\left(\frac{1}{2}, -4\right); B(1, -2);$

$C(2, -1); D\left(4, -\frac{1}{2}\right)$  și  $A'\left(-\frac{1}{2}, 4\right);$

$B'(-1, 2); C'(-2, 1); D'\left(-4, \frac{1}{2}\right).$

Concluzii. Funcția  $f(x) = \frac{k}{x}$ ,

$x \in \mathbb{R} - \{0\}$  are drept grafic o curbă numită hiperbolă.

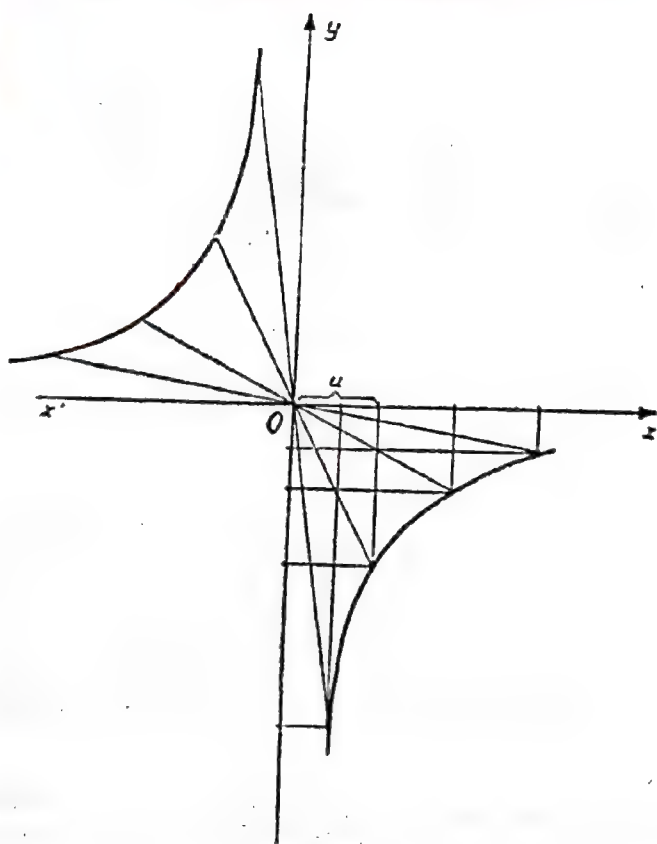


Fig. 43

Hiperbola  $y = \frac{k}{x}$  are două asimptote: axele de coordonate. Graficul este simetric față de origine.

Funcția este descrescătoare când  $x \in (-\infty, 0)$  sau  $x \in (0, +\infty)$  dacă  $k > 0$  și crește pe aceste două intervale dacă  $k < 0$ .

Variația funcției se poate urmări pe tabelul următor:

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$+\infty$
$y = \frac{k}{x}$ $k > 0$	0	$\searrow$	$-\frac{k}{3}$	$\searrow$	$-\frac{k}{2}$	$\searrow$	$-k$	$\searrow$	$-\infty$
						$+\infty$	$\searrow$	$k$	$\searrow$
								$\frac{k}{2}$	$\searrow$
								$\frac{k}{3}$	$\searrow$
									0
$y = \frac{k}{x}$ $k < 0$	0	$\nearrow$	$-\frac{k}{3}$	$\nearrow$	$-\frac{k}{2}$	$\nearrow$	$-k$	$\nearrow$	$+\infty$
						$-\infty$	$\nearrow$	$k$	$\nearrow$
								$\frac{k}{2}$	$\nearrow$
								$\frac{k}{3}$	$\nearrow$
									0

*Observare.* Domeniul de definiție al funcțiilor obținute la rezolvarea diferitelor probleme este determinat de condițiile puse în problema respectivă.

*Exemple.* 1) Volumul conului înscris într-o sferă de rază  $R$  este funcție de înălțimea  $h$  a conului

$$V(h) = \frac{\pi}{3} [R^2 - (h - R)^2] h$$

$V(h) = \frac{\pi h^2}{3} (2R - h)$ .  $V(h)$  este o funcție polinom de gradul III dar  $h \in (0, 2R)$  căci înălțimea conului este număr pozitiv mai mic decât  $2R$ .

2) Timpul în care un mobil parcurge o distanță dată  $d$  este funcție de viteză

$$T(v) = \frac{d}{v}, \quad v \in (0, +\infty)$$

pentru că viteza în această problemă este pozitivă.

## X

## Rezolvarea problemelor de aritmetică

Problemele de aritmetică se pot clasifica în: *probleme simple*, care se rezolvă printr-o singură operație aritmetică și *probleme compuse*, care se rezolvă prin două sau mai multe operații aritmetice.

Exemple de probleme simple.

- 1) Să se mărească numărul 212,75 cu 17,3.
- 2) Un caiet costă 3 lei. Cît costă 15 caiete ?
- 3) Un automobil a parcurs în  $2\frac{1}{2}$  ore distanța de 150 km.  
Care a fost viteza medie pe oră?
- 4) Un muncitor a lucrat 648 piese în 4 zile. Cîte piese a lucrat pe zi?

Problemele compuse se descompun în probleme simple care se rezolvă succesiv. În rezolvarea unei probleme compuse se parcurg următoarele etape:

- 1) Însușirea enunțului și stabilirea relațiilor dintre datele problemei. (Datele problemei pot fi reprezentate grafic.)
- 2) Descompunerea problemei în probleme simple și alcătuirea planului de rezolvare.
- 3) Rezolvarea succesivă a problemelor indicate în plan.
- 4) Verificarea rezultatului obținut în problema dată.
- 5) Stabilirea formulei de rezolvare a problemei — formule numerice. (Această etapă nu este obligatorie.)

Exemple.

1. Din două orașe situate la 18 km unul de altul pornesc în același timp doi bicicliști. Dacă merg unul spre celălalt, ei se întâlnesc după 40 minute de la plecare; dacă merg în același sens ei se vor întâlni după 6 ore de la momentul plecării. Ce viteze au cei doi bicicliști?

1) În problemă este vorba de distanță, viteză și timp. Se știe că  $s = vt$ . În prima parte a problemei distanța de 18 km este suma distanțelor parcurse de cei doi bicicliști în 40 minute:  $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$  ore. În a doua parte a problemei această distanță este diferența

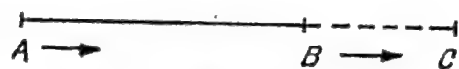
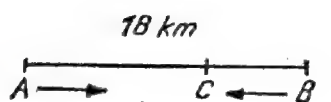


Fig. 44

distanțelor parcurse de cei doi bicicliști în 6 ore. Reprezentăm printr-un desen (fig. 44).

2) Pentru a afla vitezele celor doi bicicliști, ținând seama de datele problemei, vedem că:

a) În  $\frac{2}{3}$  ore cei doi au parcurs împreună 18 km.

Putem afla ce distanță au parcurs într-o oră deci suma vitezelor celor doi bicicliști.



b) În 6 ore biciclistul din  $A$  a parcurs cu 18 km mai mult decât cel din  $B$  deci a avut o viteză mai mare. Putem afla cât a mers mai mult într-o oră, deci diferența vitezelor.

c) Cunoscînd suma și diferența a două numere se pot afla cele două numere.

3 Rezolvarea problemei.

a) Într-o oră cei doi au parcurs

$$18 : \frac{2}{3} = 27 \text{ km.}$$

Suma vitezelor celor doi bicicliști este de 27 km/oră.

b) Într-o oră primul biciclist (din  $A$ ) a mers mai mult cu:

$$18 : 6 = 3 \text{ km.}$$

Diferența vitezelor celor doi bicicliști este de 3 km/oră.

c) Cunoscînd suma și diferența a două numere, numărul cel mare este egal cu semisuma dintre suma și diferența celor două numere:

$$\frac{27 + 3}{2} = 15; 15 \text{ km/oră este viteza primului biciclist.}$$

$15 - 3 = 12$ ; 12 km/oră este viteza celui de-al doilea biciclist.

Vitezele sînt: 15 km/oră și 12 km/oră.

4) Verificare. a) Cei doi bicicliști au parcurs în  $\frac{2}{3}$  ore distanța:

$$\frac{2}{3} (15 + 12) = \frac{2}{3} \cdot 27 = 18 \text{ km.}$$

b) În 6 ore primul a parcurs mai mult cu

$$3 \cdot 6 = 18 \text{ km.}$$

5) Formula de rezolvare.

$$\text{Viteza primului biciclist } v_1 = \frac{18 : \frac{2}{3} + 18 : 6}{2}.$$

$$\text{Viteza celui de al doilea } v_2 = \frac{18 : \frac{2}{3} - 18 : 6}{2}.$$

2. Dintr-un hambar cu cereale s-a scos în prima zi  $\frac{1}{5}$  din toată cantitatea, a doua zi  $\frac{1}{3}$  din rest, a treia zi s-a scos de 3 ori mai mult decât în a patra zi iar în a patra zi restul, care a fost cu 165 q mai mic decât s-a scos în prima zi. Ce cantitate de grâu a fost inițial în hambar?

Planul rezolvării problemei.

a) Pentru a afla întreaga cantitate va trebui să găsim ce fracție din aceasta reprezintă valoarea pe care o cunoaștem.

b) Dar pentru aceasta trebuie să știm ce parte din întreaga cantitate s-a scos în a patra zi.

c) Pentru a afla ce fracție s-a scos în a patra zi trebuie să aflăm ce fracție s-a scos în a treia și a patra zi împreună.

d) Pentru a afla această fracție trebuie să aflăm ce fracție s-a scos în primele două zile. Această problemă o putem rezolva cu ajutorul datelor din problemă. Cu rezultatul obținut vom rezolva problema precedentă ș.a.m.d.

Rezolvarea problemei.

În prima și a doua zi s-a scos

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{15} \text{ din întreaga cantitate.}$$

În a treia și a patra zi s-a scos

$$1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15} \text{ din întreaga cantitate.}$$

În a patra zi s-a scos a patra parte din cantitatea scoasă a treia și a patra zi:

$$\frac{8}{15} : 4 = \frac{2}{15} \text{ (din întreaga cantitate).}$$

Prima dată s-a scos mai mult decât a doua oară cu

$$\frac{1}{5} - \frac{2}{15} = \frac{1}{15} \text{ din întreaga cantitate ceea ce reprezintă 165 q.}$$

Întreaga cantitate va fi:

$$165 : \frac{1}{15} = 165 \cdot 15 = 2\,475 \text{ q.}$$

Verificare. Vom calcula cu cât s-a scos mai mult în prima zi considerînd că întreaga cantitate este 2 475 q. Va trebui să obținem 165 q. Ce cantitate s-a luat în fiecare zi?

$$\text{Prima zi: } \frac{1}{5} \cdot 2\,475 = 495 \text{ q.}$$

$$\text{A doua zi: } \frac{1}{3} (2\,475 - 495) = \frac{1\,980}{3} = 660 \text{ q.}$$

$$\text{A treia și a patra zi: } 1\,980 - 660 = 1\,320 \text{ q.}$$

$$\text{A patra zi: } 1\,320 : 4 = 330 \text{ q.}$$

Prima dată s-a scos mai mult cu

$$495 - 330 = 165 \text{ q.}$$

Formula de rezolvare.

Cantitatea totală este dată de formula numerică:

$$C = 165 : \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1 - \left[ \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{5} \right) \right]}{4} \right\}.$$

3. La împărțirea a două numere cîtu l a fost 31 și restul 11. Suma dintre deîmpărțit și împărțitor fiind 555 să se afle cele două numere.

Cunoaștem suma celor două numere (555) și cîțul (31). Deci împărțitorul se cuprinde în deîmpărțit de 31 ori iar în suma dată de 32 ori. Dacă împărțirea ar fi exactă am putea afla împărțitorul. Pentru a fi exactă ar trebui ca deîmpărțitul (deci și suma dată) să fie cu 11 (restul) mai mic.

Planul rezolvării problemei.

- a) Aflăm cît este împărțitorul.  
b) Cunoscînd cîțul, împărțitorul și restul, aflăm deîmpărțitul. Se poate calcula și din suma cunoscută.

Rezolvarea problemei.

- a) Împărțitorul va fi:

$$I = \frac{555 - 11}{31 + 1} = \frac{544}{32}, \quad I = 17.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } D &= 17 \cdot 31 + 11 = 527 + 11, \\ D &= 538 \text{ (sau } D = 555 - 17 = 538). \end{aligned}$$

Cele două numere sînt 538 și 17.

Verificare. Considerînd cele două numere cunoscute, calculăm cîțul și restul:

$$\begin{array}{r|l} 538 & 17 \\ 28 & 31 \\ \hline 11 & \end{array}$$

Formula de rezolvare.

$$I = (555 - 11) : (31 + 1); \quad D = [(555 - 11) : (31 + 1)] 31 + 11 \text{ sau } D = 555 - [(555 - 11) : (31 + 1)].$$

4. Pentru construirea unui zid, trei zidari au primit 902 lei. Primul a lucrat 7 zile, al doilea 13 zile, al treilea 5 zile. Cît a primit fiecare dacă primul a primit cu 4 lei pe zi mai puțin decît al doilea și cu 10 lei mai puțin decît al treilea?

Planul rezolvării problemei.

- a) Ca să aflăm cît a luat fiecare trebuie să aflăm cît a luat primul.  
b) Ca să aflăm cît a luat primul trebuie să cunoaștem ce sumă ar fi primit el dacă lucra singur numărul total de zile.

- c) Această sumă se poate afla dacă știm ce sume ar fi primit mai puțin ceilalți doi dacă ar fi fost plătiți zilnic ca și primul.

Ce sumă s-ar primi mai puțin dacă ar fi plătiți la fel (ca primul)?

$$\text{Al doilea ar primi: } 4 \cdot 13 = 52 \text{ lei.}$$

$$\text{Al treilea ar primi } 10 \cdot 5 = 50 \text{ lei.}$$

$$S = 902 - (52 + 50) = 902 - 102,$$

$$S = 800 \text{ lei.}$$

Primul a luat deci: (presupunem că el a lucrat tot timpul singur)

$$S_1 = [800 : (7 + 13 + 5)] \cdot 7 = (800 : 25) \cdot 7,$$

$$S_1 = 32 \cdot 7 = 224 \text{ lei.}$$

Ceilalți doi muncitori au primit pentru timpul cât au lucrat:

$$S_1 = (32 + 4) \cdot 13 = 36 \cdot 13,$$

$$S_2 = 468 \text{ lei},$$

$$S_3 = (32 + 10) \cdot 5 = 42 \cdot 5,$$

$$S_3 = 210 \text{ lei}.$$

Verificare. 1)  $S = 224 + 468 + 210 = 902 \text{ lei}.$

$$36 - 32 = 4 \text{ lei}$$

$$2) 42 - 32 = 10 \text{ lei}.$$

Formula de rezolvare.

$$S_1 = \frac{902 - (4 \cdot 13 + 10 \cdot 5)}{7 + 13 + 5} \cdot 7,$$

$$S_2 = \left[ \frac{902 - (4 \cdot 13 + 10 \cdot 5)}{7 + 13 + 5} + 4 \right] \cdot 13,$$

$$S_3 = \left[ \frac{902 - (4 \cdot 13 + 10 \cdot 5)}{7 + 13 + 5} + 10 \right] \cdot 5$$

5. Un grup de pionieri pleacă dintr-un oraș cu bicicletele în excursie spre o pădure situată la o distanță de 40 km de la locul de plecare. În același moment pleacă pe același drum și din același punct un motociclist. Motociclistul ajunge la pădure unde se odihnește o oră apoi se întoarce în întâmpinarea bicicliștilor. După cât timp de la plecarea din oraș se va întâlni cu ei dacă bicicliștii merg cu 12 km/oră iar motociclistul cu 36 km/oră.

Figurăm distanța parcursă prin segmentul  $BP$  (fig. 45).

Dacă motociclistul ar fi plecat imediat înapoi, atunci timpul s-ar afla împărțind dublul distanței la suma vitezelor celor doi călători. Dar motociclistul stă în  $P$  o oră; dacă în loc să se odihnească ar fi mers mai departe, atunci ar mai fi mers  $\left(\frac{36}{2} = 18\right)$  18 km. Deci putem modifica problema în acest sens.

Rezolvarea problemei.

a) Distanța parcursă pînă la momentul întâlnirii:

$$S = (40 + 18) \cdot 2 = 116 \text{ km}.$$

b) Ce distanță s-a parcurs într-o oră:  $12 + 36 = 48 \text{ km}.$

c) În cât timp a fost parcursă această distanță:



$$116 : 48 = 2 \frac{5}{12} \text{ ore}.$$

Distanța a fost parcursă în  $2 \frac{5}{12}$  ore.



Verificare. Calculăm distanța de la locul de pornire pînă la pădure.

$$\text{Bicicliștii au parcurs } 12 \cdot 2 \frac{5}{12} = 12 \cdot \frac{29}{12}$$

Fig. 45



$$BC = 29 \text{ km.}$$

$$\text{Motociclistul a parcurs: } 36 \cdot \left(2\frac{5}{12} - 1\right) = 36 \cdot 1\frac{5}{12} = 51 \text{ km,}$$

$$BP + CP = 51.$$

$$d = \frac{29 + 51}{2} = 40 \text{ km.}$$

**Observări.** În exemplul (1) am întocmit planul pornind de la datele cunoscute ale problemei. Am format o problemă pe care am putut s-o rezolvăm. Cu rezultatul obținut și cu alte date ale problemei am format o nouă problemă ș.a.m.d. până am ajuns la o problemă a cărei întrebare era întrebarea problemei inițiale. Rezolvarea propriu-zisă a urmărit planul punct cu punct. În exemplele (2) și (4) am întocmit planul pornind de la întrebarea problemei. Am format o problemă cu date pe care le-am presupus cunoscute, apoi o problemă pentru a afla aceste date ș.a.m.d. până am ajuns la o problemă pe care am putut s-o rezolvăm cu datele cunoscute din problemă. Rezolvarea propriu-zisă se face urmărind planul în ordine inversă, pornind de la ultima problemă.

În exemplele (3) și (5) am pornit de la întrebarea problemei dar am folosit de la început datele problemei formând probleme în care datele erau cunoscute.

## Metode particulare de rezolvare a problemelor

### Metoda comparației

Aducerea la același termen de comparație se poate face:

- prin scădere,
  - prin înlocuirea mărimilor de același fel din problemă prin una din ele.
- a) *Compararea prin diferență*

**1.** Două brigăzi ale unei cooperative agricole de producție au strâns în prima săptămână 360 tone de lucernă. În a doua săptămână prima brigadă a strâns cu 10% mai mult iar a doua cu 15% mai mult decât în prima săptămână, strângând cu 44 tone mai mult. Ce cantitate de lucernă a strâns fiecare brigadă a doua săptămână?

Comparăm cele două situații date de problemă.

Cantitatea recoltată exprimată în procente		Cantitatea totală exprimată în tone
Brigada întâi	Brigada a doua	
100%	100%	360 t
10%	10%	44 t
sau		
10%	10%	36 t
10%	15%	44 t

La diferența  $44 - 36 = 8 \text{ t}$  corespunde diferența de  $15\% - 10\% = 5\%$ .

Dacă la 5% corespund 8 tone,

la 100% corespund  $8 : \frac{5}{100} = 160 \text{ t.}$

Prima brigadă a strîns în prima săptămînă:

$360 - 160 = 200 \text{ t}$  iar a doua restul de 160 t.

Prima brigadă a strîns în săptămîna a doua  $200 + \frac{10}{100} \cdot 200 = 220 \text{ t.}$

A doua brigadă a strîns  $160 + \frac{15}{100} \cdot 160 = 184 \text{ t.}$

În săptămîna a doua s-au strîns 220 t și 184 t.

Verificare. În prima săptămînă s-au strîns

$$200 + 160 = 360 \text{ t.}$$

În săptămîna a doua s-au strîns mai mult  $\frac{10}{100} \cdot 200 + \frac{15}{100} \cdot 160 = 44 \text{ t.}$

2. O fabrică a produs în prima lună mașini de spălat rufe și frigidere, în total 400. În luna a doua a produs de două ori mai multe mașini de spălat rufe și cu 15% mai multe frigidere, în total 715. Cîte mașini de spălat și cîte frigidere s-au produs în fiecare lună?

Procedînd în mod analog ca la problema precedentă aranjăm datele astfel ca să le putem compara.

Producția în procente.

	Mașini	Frigidere	
Prima lună:	100%	100%	400
Luna a doua:	200%	115%	715

Pentru a putea compara valorile corespunzătoare numai pentru două mărimi considerăm același procentaj de exemplu pentru mașini

Prima lună:	200%	200%	800
Luna a doua:	200%	115%	715

La diferența de procente (200—115) corespund 800—715 frigidere.

85% din numărul frigiderelor este 85.

$$100\% \text{ va fi } 85 : \frac{85}{100} = 100.$$

În prima lună au fost produse 300 mașini și 100 frigidere.

În a doua săptămînă,  $\frac{200}{100} \cdot 300 = 600$  mașini și  $\frac{115}{100} \cdot 100 = 115$  frigidere.

Verificare.

În prima lună s-au produs  $300 + 100 = 400$ ; în a doua,  $2 \cdot 300 + \frac{115}{100} \cdot 100 = 715$ .

## b) Compararea prin înlocuire

1. Cît costă metrul din fiecare material dacă 32 m stambă, 40 m barchet și 25 m pînză costă 1 428 lei iar 1 m de pînză este de 2,4 ori mai scump ca 1 m de stambă, iar 1 m de barchet este de 1,44 ori mai ieftin ca 1 m de pînză.

Considerăm că din toată suma s-a cumpărat numai pînză înlocuind stamba și barchetul cu pînză; 1 m de stambă este de 2,4 ori mai ieftină deci în loc de 32 m stambă s-ar cumpăra de 2,4 ori mai puțină pînză:

$$32 : 2,4 = 32 : \frac{24}{10} = \frac{32 \cdot 10}{24} = \frac{40}{3} ; \quad 13 \frac{1}{3} \text{ m pînză.}$$

1 m de barchet este de 1,44 ori mai ieftin ca 1 m de pînză. Deci în loc de 40 m barchet s-ar cumpăra de 1,44 ori mai puțină pînză

$$40 : 1,44 = 40 : \frac{144}{100} = 40 \cdot \frac{100}{144} = \frac{250}{9} = 27 \frac{7}{9} \text{ m.}$$

Un metru de pînză costă deci

$$1\,428 : \left( 25 + 13 \frac{3}{9} + 27 \frac{7}{9} \right) = 1\,428 : 66 \frac{1}{9}.$$

$$1\,428 : \frac{595}{9} = 1\,420 \cdot \frac{9}{595} = \frac{108}{5},$$

$$12 \cdot \frac{9}{5} = \frac{108}{5}; \quad 21 \frac{3}{5} = 21,60 \text{ lei.}$$

Un metru de stambă va costa

$$21,6 : 2,4 = 9 \text{ lei.}$$

Un metru de barchet va costa

$$21,6 : 1,44 = 15 \text{ lei.}$$

Verificare

$$9 \cdot 32 + 15 \cdot 40 + 21,6 \cdot 25 = 288 + 600 + 540 = 1\,428 \text{ lei.}$$

2. În depozitul unei secții de confecții existau 240 m stofă calitate întâi și 360 m de calitate a doua în valoare totală de 103 200 lei.

Pentru confecționarea unor costume s-au folosit 30% din stoffa de calitate întâi și 45% din aceea de calitate a doua. Dacă stoffa de calitate a doua necesară acestor costume a costat cu 1 440 lei mai mult decît stoffa de calitate întâi utilizată în același scop, să se afle cît costă metrul de stofă din fiecare calitate.

240 m I	360 m II	103 200 lei
30% din 240 = 72 m	45% din 360 = 162 m.	

72 m de calitate întâi au costat cît 162 m de calitate a doua minus 1 440 lei.

1 m de calitate întâi a costat cît,  $2 \frac{1}{4} \text{ m} \left( \frac{1\,62}{72} = 2 \frac{1}{4} \text{ m} \right)$  mai puțin 20 lei

$$(1\,440 : 72 = 20).$$

Înlocuim cantitatea de 240 m de calitate întâi prin 540 m  $\left(\frac{9}{4} \cdot 240 = 540\right)$  de calitate a doua mai puțin  $20 \cdot 240 = 4\,800$  lei.

Deci, pentru 900 m ( $540 \text{ m} + 360 \text{ m} = 900 \text{ m}$ ) de calitate a doua s-ar plăti  
 $103\,200 + 4\,800 = 108\,000$  lei.

În consecință 1 m de stofă de calitate a doua costă  $108\,000 : 900 = 120$  lei.  
 360 m de calitate a doua vor costa

$$120 \cdot 360 = 43\,200 \text{ lei.}$$

Pentru 1 m de stofă de calitate întâi se plătește  $(103\,200 - 43\,200) : 240 = 60\,000 : 240 = 250$  lei.

Verificare.

$$250 \cdot 72 = 18\,000.$$

$$120 \cdot 162 = 19\,440.$$

$$19\,440 - 18\,000 = 1\,440.$$

### METODA REZOLVĂRII PORNIND DE LA SFÎRȘIT

1. Trei muncitori fruntași au primit pentru o inovație o sumă de bani. Primul muncitor a primit  $\frac{1}{3}$  din sumă plus 100 lei, al doilea  $\frac{2}{5}$  din rest plus 100 lei iar al treilea  $\frac{3}{4}$  din noul rest plus 140 lei. Cît a încasat fiecare muncitor?

Rezolvarea problemei.

Cel de-al treilea muncitor a luat  $\frac{3}{4}$  din ultimul rest și încă 140 lei.

Deci  $\frac{1}{4}$  din ultimul rest este 140 lei. Ultimul rest a fost:

$$140 : \frac{1}{4} = 560 \text{ lei.}$$

Al doilea a luat  $\frac{2}{5}$  din primul rest plus 100 lei.

Deci  $\frac{3}{5}$  din primul rest este:

$$100 + 560 = 660 \text{ lei.}$$

$$\text{Primul rest: } 660 : \frac{3}{5} = 660 \cdot \frac{5}{3} = 220 \cdot 5 = 1\,100.$$

Primul a primit  $\frac{1}{3}$  din sumă plus 100 lei.

Deci  $\frac{2}{3}$  din sumă este:  $1\,100 + 100 = 1\,200$  lei.

Suma va fi deci:

$$1\,200 : \frac{2}{3} = 1\,200 \cdot \frac{3}{2} = 600 \cdot 3 = 1\,800 \text{ lei.}$$



Primul muncitor a primit

$$\frac{1}{3} \cdot 1\,800 + 100 = 700 \text{ lei; rest } 1\,800 - 700 = 1\,100 \text{ lei.}$$

Al doilea muncitor a primit

$$\frac{2}{5} \cdot 1\,100 + 100 = 540 \text{ lei; rest } 1\,100 - 540 = 560 \text{ lei.}$$

Al treilea muncitor a primit 560 lei.

2. Dintr-un vas se scoate pe rând  $\frac{1}{2}$  din conținut și încă 1 l;  $\frac{2}{3}$  din rest și încă 1 l,  $\frac{3}{4}$  din noul rest și încă 1 l;  $\frac{4}{5}$  din noul rest și încă 1 l;  $\frac{5}{6}$  din noul rest și încă 1 l.

La urmă au rămas 3 l de lichid. Cît lichid era inițial în vas?

Să notăm resturile cu  $r, r_1, r_2, r_3$ ,

După ce s-au luat  $\frac{5}{6}$  din ultimul rest ( $r_3$ ) au rămas:

$$1 + 3 = 4 \text{ l. Deci } \frac{1}{6} \text{ din } r_3 \text{ reprezintă } 4 \text{ l.}$$

$$r_3 = 4 : \frac{1}{6} = 4 \cdot 6 = 24 \text{ l.}$$

După ce s-au luat  $\frac{4}{5}$  din restul  $r_2$  au rămas

$$1 + 24 = 25 \text{ l. Deci } r_2 = 25 \cdot 5 = 125 \text{ l.}$$

După ce s-a luat  $\frac{3}{4}$  din al doilea rest  $r_1$ , au rămas

$$1 + 125 = 126 \text{ l ceea ce reprezintă } \frac{1}{4} \text{ din } r_1.$$

$$r_1 = 126 : \frac{1}{4} = 126 \cdot 4 = 504 \text{ l.}$$

După ce s-au luat  $\frac{2}{3}$  din al doilea rest  $r_1$  au rămas

$$1 + 504 = 505 \text{ l ceea ce reprezintă } \frac{1}{3} \text{ din primul rest } (r).$$

Primul rest va fi:

$$r = 505 : \frac{1}{3} = 505 \cdot 3 = 1\,515.$$

După ce s-a luat  $\frac{1}{3}$  din întreaga cantitate au rămas  $1 + 1\,515 = 1\,516$  l ceea ce reprezintă  $\frac{1}{2}$  din întreaga cantitate.

Întreaga cantitate:

$$1\,516 \cdot 2 = 3\,032 \text{ l.}$$

Verificare.

$$\text{I} \quad \frac{1}{2} \cdot 3\,032 + 1 = 1\,517; \text{ rest } 3\,032 - 1\,517 = 1\,515.$$

$$\text{II} \quad \frac{2}{3} \cdot 1\,515 + 1 = 1\,011; \text{ rest } 1\,515 - 1\,011 = 504.$$

$$\text{III} \quad \frac{3}{4} \cdot 504 + 1 = 379; \text{ rest } 504 - 379 = 125.$$

$$\text{IV} \quad \frac{4}{5} \cdot 125 + 1 = 101; \text{ rest } 125 - 101 = 24.$$

$$\text{V} \quad \frac{5}{4} \cdot 24 + 1 = 31; \text{ rest } 24 - 31 = -7.$$

### Metoda grafică

Pentru înțelegerea relațiilor din unele probleme folosim reprezentarea unor valori prin figuri (segmente, dreptunghiuri, cercuri etc.).

1. Două persoane au depus câte o sumă de bani la C.E.C. Prima a depus o sumă de 3 ori mai mare decât a doua. Când prima a cheltuit 2 680 lei iar a doua 500 lei, în ambele carnete a rămas aceeași sumă. Ce sume au depus cele două persoane inițial?

Figurăm sumele prin două segmente; unul de 3 ori mai mare decât celălalt (fig. 46).

După ce au cheltuit respectiv 2 680 și 500, sumele au rămas egale.

Prima persoană a cheltuit în plus

$$2\,680 - 500 = 2\,180 \text{ lei.}$$

Această sumă reprezintă de două ori suma inițială depusă de a doua persoană care este

$$2\,180 : 2 = 1\,090 \text{ lei.}$$

Prima persoană a depus

$$1\,090 \cdot 3 = 3\,270 \text{ lei.}$$

Cele două persoane au depus respectiv 3 270 lei și 1 090 lei.

Verificare.  $3\,270 - 2\,680 = 590$ ,

$$1\,090 - 500 = 590.$$

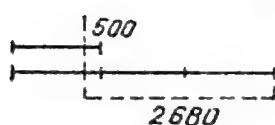


Fig. 46

2. O ladă cu zahăr conține de 5 ori mai mult zahăr decât altă ladă. Dacă din ambele lăzi se scot câte 4 kg atunci în prima rămâne de 7 ori mai mult zahăr decât în a doua. Cât zahăr a fost în fiecare ladă?

Reprezentăm cantitățile inițiale prin două segmente; unul de 5 ori mai mare decât celălalt (fig. 47).



Fig. 47

Dacă scădem din cele două lăzi câte 4 kg, cantitatea rămasă în a doua ladă se cuprinde în cantitatea rămasă în prima ladă de 5 ori și mai rămîne  $4 \cdot 5 - 4 = 16$  kg care reprezintă de 2 ori cantitatea rămasă în a doua ladă. Deci în a doua ladă au rămas  $16 : 2 = 8$  kg.

Prima ladă a avut inițial  $8 + 4 = 12$  kg.

A doua ladă a avut inițial  $12 \cdot 5 = 60$  kg.

Formula de rezolvare.

$$\text{În prima ladă au fost: } a = \frac{4 \cdot 5 - 4}{2} + 4.$$

$$\text{În a doua ladă a fost: } b = \left( \frac{4 \cdot 5 - 4}{2} + 4 \right) \cdot 5.$$

Verificare.

$$1) 60 : 12 = 5; 2) 60 - 4 = 56; 3) 12 - 4 = 8; 4) 56 : 8 = 7.$$

### Metoda ipotezelor

1. *Muncitorii unei întreprinderi au făcut excursii la Doftana și la hidrocentrala de pe Argeș. Costul excursiei la Doftana a fost de 40 lei iar al celei la hidrocentrală, 60 lei. Câți muncitori au plecat la Doftana și câți la hidrocentrală dacă în total au fost 80 de muncitori, și costul total al celor două excursii a fost de 4 200 lei?*

Presupunem că toți muncitorii au plecat la Doftana. Atunci excursia ar fi costat  $40 \cdot 80 = 3\,200$  lei.

În realitate a costat mai mult cu  $4\,200 - 3\,200 = 1\,000$  lei.

Această diferență provine din faptul că o excursie la hidrocentrală costă mai mult cu  $60 - 40 = 20$  lei.

Vor fi atîția excursioniști la hidrocentrală de câte ori se cuprinde 20 în 1 000.  $1\,000 : 20 = 50$  (excursioniști).

La Doftana au fost  $80 - 50 = 30$  excursioniști.

Verificare.  $40 \cdot 30 + 60 \cdot 50 = 1\,200 + 3\,000 = 4\,200$ .

2. *Un taxator de tramvai are 100 bancnote de câte 3 lei și 5 lei în valoare de 440 lei. Cîte bancnote de 3 respectiv 5 lei are?*

Presupunem că ar avea numai bancnote de 3 lei.

Suma a 100 bancnote ar fi  $3 \cdot 100 = 300$  lei.

În realitate are mai mult cu  $440 - 300 = 140$  lei.

Această diferență provine din faptul că în realitate are și bancnote de 5 lei. Înlocuind o bancnotă de 3 lei cu una de 5, diferența se micșorează cu 2 lei. Deci vor fi atîtea bancnote de 5 lei de câte ori 2 se cuprinde în diferența de 140 lei,

$$140 : 2 = 70 \text{ (bancnote de 5 lei).}$$

Numărul bancnotelor de 3 lei este  $100 - 70 = 30$  bancnote.

Au fost 30 bancnote de 3 lei și 70 bancnote de 5 lei.

Verificare.  $3 \cdot 30 + 5 \cdot 70 = 90 + 350 = 440$  lei.

### Acțiuni simultane

1. Două combine lucrând împreună pot strînge întreaga recoltă de grâu de pe terenul unei C.A.P. în 12 zile. După ce au lucrat împreună 10 zile, lucrul rămas a fost terminat numai de una din ele în 5 zile. În cît timp ar termina de strîns toată recolta fiecare din combine dacă ar lucra singură.

Considerînd întreaga recoltă un întreg, amîndouă combinele vor strînge într-o zi  $\frac{1}{12}$  din întreaga cantitate; în 10 zile vor strînge  $\frac{1}{12} \cdot 10 = \frac{5}{6}$  din întreaga cantitate.

În 5 zile, combina care continuă lucrul, va strînge restul:  $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$  (din întreaga cantitate).

Într-o zi ea strînge  $\frac{1}{6} : 5 = \frac{1}{30}$  (din întreaga cantitate).

Toată cantitatea o va strînge deci în  $1 : \frac{1}{30} = 30$  zile.

Într-o zi a doua combină strînge

$$\begin{array}{cc} 5) & 2) \\ \frac{1}{12} - \frac{1}{30} & = \frac{3}{60} = \frac{1}{20} \end{array}$$

Toată recolta o strînge în  $1 : \frac{1}{20} = 20$  zile.

Verificare. În 12 zile cele două combine pot strînge  $12 \cdot \left( \frac{1}{30} + \frac{1}{20} \right) = 12 \cdot \frac{5}{60} = 1$  adică întreaga recoltă. Prima combină strînge în 15 zile  $\frac{1}{30} \cdot 15 = \frac{1}{2}$  din toată recolta.

A doua combină strînge în 10 zile  $\frac{1}{20} \cdot 10 = \frac{1}{2}$  din toată recolta.

Cele două combine au strîns  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  (întreaga recoltă).

2. Un bazin se umple prin trei robinete. Dacă curg numai primul și al doilea robinet împreună, atunci bazinul se umple în 6 ore; dacă curg numai al doilea și al treilea, bazinul se umple în 7 ore și 30 minute, dacă curg numai primul și al treilea, bazinul se umple în 10 ore. În cît timp ar umple bazinul fiecare robinet dacă ar curge singuri. Se consideră debitul constant.

Vom nota cu I, II, III cele trei robinete.

Robinetele I și al II-lea umplu  $\frac{1}{6}$  din bazin într-o oră.

Robinetele al II-lea și al III-lea umplu  $\frac{1}{7\frac{1}{2}} = \frac{2}{15}$  din bazin.



Robinetele I și al III-lea umplu  $\frac{1}{10}$  din bazin.

Deci într-o oră, dacă s-ar deschide toate robinetele, s-ar umple jumătate (fiecare curge câte 2 ore).

$$\overset{5)}{\frac{1}{6}} + \overset{2)}{\frac{2}{15}} + \overset{3)}{\frac{1}{10}} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} ; \quad \frac{2}{5} : 2 = \frac{1}{5} \text{ din bazin.}$$

Robinetul al III-lea va umple într-o oră  $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$  din bazin.

Robinetul I va umple într-o oră  $\frac{1}{5} - \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$  din bazin.

Robinetul al II-lea va umple într-o oră  $\frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$  din bazin.

Bazinul va fi umplut de fiecare robinet dacă ar curge singur astfel:

robinetul I  $1 : \frac{1}{15} = 15$  ore,

robinetul al II-lea  $1 : \frac{1}{10} = 10$  ore,

robinetul al III-lea  $1 : \frac{1}{30} = 30$  ore.

Verificare.

$$1) \quad 6 \cdot \left( \frac{1}{15} + \frac{1}{10} \right) = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1;$$

$$2) \quad 7 \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{30} \right) = \frac{15}{2} \cdot \frac{4}{30} = 1,$$

$$3) \quad 10 \left( \frac{1}{15} + \frac{1}{30} \right) = 10 \cdot \frac{3}{30} = 1.$$

De cele mai multe ori pentru rezolvarea unei probleme folosim succesiv mai multe metode pentru a afla datele necesare rezolvării ei.

**1.** 10 tone de mere, de calități diferite, au fost așezate în 850 lădițe; merele de calitate întâi în lădițe de 15 kg și cele de calitate a doua în lădițe de 10 kg. Prețul total al merelor este de 49 000 lei și 3 kg de mere de calitate a doua valorează cât 2 kg de mere de calitate întâi. Să se afle:

a) Câte lădițe de fiecare calitate erau?

b) Ce cantitate de mere din fiecare calitate erau?

c) Cât costă 1 kg de mere din fiecare fel?

a) Au fost 850 lădițe de 15 kg și 10 kg, total 10 t de mere.

Presupunem că toate lădițele au fost de 15 kg. Cantitatea totală ar fi fost  $15 \times 850 = 12\,750$  kg.

Dar în realitate au fost numai  $10 \text{ t} = 10\,000 \text{ kg}$ .

$$12\,750 - 10\,000 = 2\,750 \text{ kg.}$$

Diferența de  $2\,750 \text{ kg}$  provine din faptul că au fost și lădițe de  $10 \text{ kg}$ . Pentru fiecare lădiță de  $10 \text{ kg}$  corespunde o diferență de  $15 - 10 = 5 \text{ kg}$ .

Numărul lădițelor de  $10 \text{ kg}$ :  $2\,750 : 5 = 550$  lădițe.

Numărul lădițelor de  $15 \text{ kg}$ :  $850 - 550 = 300$  lădițe.

b) Cantitatea de mere de calitate întâi:  $15 \times 300 = 4\,500 \text{ kg}$ .

Cantitatea de mere de calitate a doua:  $10 \times 550 = 5\,500 \text{ kg}$ .

c) Sînt două calități de mere:  $4\,500 \text{ kg}$  de calitate întâi și  $5\,500 \text{ kg}$  mere calitate a doua care costă în total  $49\,000$ . Înlocuim merele de calitate întâi cu mere de calitate a doua.

$4\,500 \text{ kg}$  mere de calitate întâi costă cît  $\frac{3 \times 4\,500}{2} = 3 \times 2\,250 = 6\,750 \text{ kg}$ .

Deci  $49\,000$  lei reprezintă costul a  $12\,250 \text{ kg}$  mere de calitate a doua deoarece  $6\,750 + 5\,500 = 12\,250 \text{ kg}$ . Costul unui kilogram de mere de calitate a doua este  $49\,000 : 12\,250 = 4$  lei.

Merele de calitate întâi costă  $3 \times 4 : 2 = 6$  lei.

Verificarea se poate face pornind de la sfîrșit cu ultima problemă (c) apoi cu (b) și (a).

Formulele de rezolvare se stabilesc pentru fiecare punct. Ultima problemă cuprinde rezultatele problemelor precedente. Să stabilim formula care exprimă prețul unui kilogram de calitate întâi.

$$N = \frac{3}{2} \cdot 49\,000 : \left\{ \frac{3}{2} \times 15 \left( 850 - \frac{15 \times 850 - 10\,000}{15 - 10} \right) + \left[ 10 \times \frac{15 \times 850 - 10\,000}{15 - 10} \right] \right\}.$$

2. Doi muncitori au executat o lucrare și au primit  $2\,880$  lei. Dacă primul muncitor ar fi lucrat 2 zile și al doilea 5 zile, ar fi primit  $264$  lei. Dacă numărul zilelor lucrate de primul muncitor ar fi de  $2,5$  ori cît numărul zilelor lucrate de cel de-al doilea, adică, dacă l-ar întrece cu 39 zile, atunci ar primi împreună  $3\,120$  lei. Cît a primit fiecare? Cîte zile a lucrat fiecare?

a) Cunoaștem raportul dintre numărul zilelor lucrate de fiecare  $\left(\frac{25}{10}\right)$  și diferența care este  $39$  lei. Numărul zilelor lucrate de-al doilea se cuprinde în diferență de  $2,5 - 1 = 1,5$  ori.

Numărul zilelor lucrate de al doilea muncitor:

$$39 : 1,5 = 26 \text{ (zile).}$$

Numărul zilelor lucrate de primul muncitor:

$$26 + 39 = 65 \text{ (zile).}$$

b) Pentru  $65$  zile (primul muncitor) respectiv  $26$  zile (al doilea muncitor) primesc  $3\,120$  lei.

Pentru  $2$  zile (primul muncitor) respectiv  $5$  zile (al doilea muncitor) primesc  $264$  lei.

Aducem la același termen de comparație.

$$65 \text{ zile} \dots 26 \text{ zile} \dots 3\,120 \text{ lei}$$

$$65 \text{ zile} \dots 65 \cdot \frac{5}{2} \dots 65 \cdot \frac{264}{2} \text{ lei.}$$

Diferența de  $(8\,580 - 3\,120)$  lei provine din diferența de  $(162,5 - 26)$  zile.

Pentru o zi, al doilea a primit  $5\,460 : 136,5 = 40$  lei.

Pentru o zi, primul a primit  $\frac{264 - 40 \times 5}{2} = \frac{64}{2} = 32$  lei.

c) Pentru o lucrare, doi muncitori plătiți pe zi cu 40 lei respectiv 32 lei au primit 2 880 lei. Cîte zile au lucrat cei doi muncitori?

$$2\,880 : (40 + 32) = 2\,880 : 72 = 40 \text{ zile.}$$

## Probleme cu mărimi proporționale

### Probleme cu rapoarte și proporții

1. O barcă parcurge o distanță în sensul curentului apei în  $4\frac{1}{2}$  ore, iar împotriva curentului apei în 6 ore. În cît timp ar parcurge aceeași distanță o plută care ar înainta cu viteza apei?

Dacă notăm cu  $v_0$  viteza apei;  $v$  viteza proprie a bărcii;  $v_1$  viteza bărcii în sensul curentului apei,  $v_2$  viteza bărcii în sens contrar curentului apei, atunci

$$v_1 = v + v_0$$

$$v_2 = v - v_0.$$

Notăm cu  $t_0$ ,  $t$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  respectiv timpul necesar în fiecare caz. Pentru parcurgerea aceleiași distanțe, viteza și timpul sînt invers proporționale.

Avem următoarea situație:

viteza în km/oră

$$v_0$$

$$v_1 = v_0 + v$$

$$v_2 = v - v_0$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{6}{4\frac{1}{2}}$$

sau

timpul în ore

$$t_0$$

$$t_1 = 4\frac{1}{2} \text{ ore}$$

$$t_2 = 6 \text{ ore}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{4}{3}$$

Trebuie aflat  $t_0$ .

$$\frac{t_0}{t_2} = \frac{v - v_0}{v_0} \quad \text{trebuie calculat raportul } \frac{v - v_0}{v_0}.$$

Observăm că  $\frac{v_0 + v}{v - v_0} = \frac{4}{3}$ , de unde:

$$\frac{v - v_0}{2v_0} = \frac{3}{1} \quad \text{sau} \quad \frac{v - v_0}{v_0} = 6.$$

Deci  $\frac{t_0}{6} = 6$ ,  $t_0 = 36$ .

Pluta ar parcurge întreaga distanță în 36 ore (dacă ar merge cu viteza apei).

2. Un tren de marfă merge cu o viteză constantă de 34 km/oră și parcurge o distanță în 8 ore. După ce a făcut 102 km este silit să oprească  $\frac{3}{4}$  oră. Cu ce viteză trebuie să continue drumul pentru a ajunge la ora fixată?

Timpul în care a parcurs 102 km:  $102 : 34 = 3$  ore.

Trenul mai avea de mers 5 ore pentru a parcurge distanța rămasă. Oprindu-se  $\frac{3}{4}$  oră, trebuie să parcurgă această distanță în  $4\frac{1}{4}$  ore.

5 ore... 34 km/oră

$4\frac{1}{4}$  ore...  $x$

Mărimile sînt invers proporționale. Dacă timpul se mărește de un număr de ori, viteza se micșorează de același număr de ori

$$\frac{5}{4\frac{1}{4}} = \frac{x}{34}$$

$$x = \frac{34 \times 5}{\frac{17}{4}}$$

$$x = \frac{34 \times 5 \times 4}{17}$$

$$x = 40 \text{ km/oră.}$$

3. O soluție de 40 kg de apă cu sare conține 3,5 kg sare. Cîtă apă trebuie să-i adăugăm pentru ca noua soluție să conțină în 30 kg numai 1 kg de sare.

Trebuie să aflăm cantitatea de soluție obținută.

1 kg sare... 30 kg soluție

3,5 kg sare.....  $x$

Cantitatea de sare și cantitatea de soluție sînt mărimi direct proporționale.

$$\frac{1}{3,5} = \frac{30}{x}, \quad x = 3,5 \times 30 = 105 \text{ kg.}$$

Trebuie să adăugăm  $105 - 40 = 65$  kg apă.

4. Trei muncitori au primit pentru o lucrare 426 lei. Primul a lucrat de  $\frac{3}{4}$  ori mai mult decît al treilea, al doilea de 2,4 ori mai mult decît primul. Cît a primit fiecare?



Suma este împărțită în părți proporționale cu 3 numere pe care trebuie să le determinăm. Fie  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sumele primite respectiv de primul, al doilea și al treilea muncitor.

$$a = \frac{3}{4} \cdot c, \quad \text{sau} \quad \frac{a}{3} = \frac{c}{4},$$

$$b = \frac{24}{10} \cdot a \quad \text{sau} \quad \frac{b}{12} = \frac{a}{5}.$$

Să transformăm proporțiile astfel încât rapoartele care-l conțin pe  $a$  să aibă același numitor ( $3 \times 5$ )

$\frac{a}{15} = \frac{c}{20}$ ,  $\frac{b}{36} = \frac{a}{15}$ . Avem un șir de rapoarte egale. Aplicăm proprietatea șirului de rapoarte egale.

$$\frac{a}{15} = \frac{b}{36} = \frac{c}{20} = \frac{426}{71} = 6.$$

$$a = 90, \quad b = 216, \quad c = 120.$$

Verificare.  $S = 426 = 90 + 216 + 120$ .

$$90 : 120 = \frac{3}{4},$$

$$216 : 90 = 2,4.$$

5. La un concurs de mâini îndemânate s-a dat un premiu de 726 lei la trei concurenți. Toți au lucrat tot atât de bine dar timpul de execuție a fost diferit; primul a executat într-o oră și 12 minute, al doilea într-o oră și 20 de minute și al treilea într-o oră și 4 minute. Suma s-a împărțit invers proporțional cu timpul de execuție. Cât a primit fiecare?

A împărți numărul 726 în părți invers proporționale cu numerele  $1\frac{12}{60}$ ,  $1\frac{20}{60}$ ,

$1\frac{4}{60}$  înseamnă a-l împărți în părți direct proporționale cu numerele:

$$\frac{1}{6} = \frac{5}{6}, \quad \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{1}{16} = \frac{15}{16} \quad \text{sau cu numărătorii fracțiilor}$$

$$\begin{array}{lll} 8) & 12) & 3) \\ \frac{5}{6} & \frac{3}{4} & \frac{15}{16} \end{array} \quad \text{aduse la același numitor adică cu 40, 36, 45,}$$

$$\frac{x}{40} = \frac{y}{36} = \frac{z}{45} = \frac{726}{121} = 6.$$

$$x = 240, \quad y = 216, \quad z = 270.$$

### Probleme de amestec și aliaj

Titlul unui aliaj este raportul dintre masa metalului prețios și masa totală a aliajului;  $T = \frac{m}{M}$ . De obicei exprimăm titlul unui aliaj printr-o fracție zecimală cu numitorul 1 000.

1. Cunoscând titlul aliajului și cantitatea de aliaj, aflăm cantitatea de metal prețios astfel:

$$m = T \cdot M.$$

2. Cunoscând titlul aliajului și cantitatea de metal prețios, aflăm cantitatea totală astfel:

$$M = \frac{m}{T}.$$

3. Fiind date două aliaje din aceleași metale dar cu titluri diferite,  $M_1$  cu  $T_1$ ,  $M_2$  cu  $T_2$ , atunci titlul  $T$  al aliajului obținut prin topirea lor este

$$T = \frac{M_1 T_1 + M_2 T_2}{M_1 + M_2},$$

În adevăr, avem  $m_1 = M_1 T_1$ ,  $m_2 = M_2 T_2$ .

Cantitatea totală de aliaj obținut este  $m = m_1 + m_2$ .

$$T = \frac{m}{M}, \quad T = \frac{m_1 + m_2}{M}, \quad T = \frac{M_1 T_1 + M_2 T_2}{M_1 + M_2}.$$

4. Dacă topim două aliaje  $M_1$  și  $M_2$ , titlul noului aliaj  $T$  depinde numai de raportul maselor celor două aliaje.

$$\text{Din } T = \frac{M_1 T_1 + M_2 T_2}{M_1 + M_2} \text{ obținem}$$

$$T M_1 + T M_2 = M_1 T_1 + M_2 T_2,$$

$$M_1 (T - T_1) = M_2 (T_2 - T),$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{T_2 - T}{T - T_1}.$$

*Exemplu.* Un lingou de argint cu titlul de 0,875 are masa de 2 340 g; câtă aramă trebuie să-i adăugăm pentru a obține un aliaj cu titlul 0,835.

În primul aliaj se găsește  $m = 2\,340 \times 0,875$  g argint curat. Aceeași cantitate de argint curat va avea și al doilea aliaj. Știm că  $M = \frac{m}{T}$ .

$$M = \frac{2\,340 \times 0,875}{0,835}, \quad M = 2\,452,10 \text{ g.}$$

$$2\,452,10 - 2\,340 = 112,10 \text{ g.}$$

## Probleme de procente

Un raport cu numitorul 100 se numește raport procentual. El este de forma  $\frac{p}{100}$  și se notează  $p\%$ . Înțelegem că la 100 unități dintr-o mărime corespund  $p$  unități din altă mărime.

*Exemple.* 1) Concentrația unei soluții de zahăr este  $8\%$  (la 100 grame soluție corespunde 8 grame zahăr).

2) Tăria unui vin este  $5\%$  (la 100 părți vin sînt 5 părți alcool).

3) Rabat  $5\%$  (la fiecare 100 lei se scad 5 lei, deci la 100 lei corespund 95 lei).

4) Gratificație  $2\%$  (la fiecare 100 lei se acordă 2 lei, deci la 100 lei corespund 102 lei).

*Aplicație.* Lemnele pierd prin uscare  $18\%$  din masă. Din cîte kilograme de lemne verzi s-au obținut 4 674 kg lemne uscate.

### Rezolvare

Dacă s-au pierdut 18 kg din 100 kg, înseamnă că au rămas 82 kg deci:

$$\begin{array}{r} 82 \text{ kg} \dots\dots\dots 100 \text{ kg} \\ 4\,674 \text{ kg} \dots\dots\dots x \\ \hline x = \frac{4\,674 \times 100}{82} = 5\,700 \text{ kg.} \end{array}$$

Problemele cu mai multe mărimi proporționale (de regulă de trei compusă) se rezolvă reducîndu-le la probleme de regulă de trei simplă.

*Exemplu.* Dacă un călător își mărește viteza cu  $\frac{2}{5}$  din ea, cîte ore trebuie să meargă în fiecare zi pentru a parcurge în 5 zile distanța pe care a parcurs-o în 7 zile mergînd cîte 9 ore pe zi?

Vom considera viteza egală cu unitatea (1 întreg) iar viteza mărită,  $\frac{7}{5}$ .

Problema se poate rezolva și prin reducerea la unitate și prin metoda proporțiilor

### Reducerea la unitate

<u>Timpul în zile</u>	<u>viteza</u>	<u>nr. orelor pe zi</u>
7 zile	1	9 ore
5 zile	$\frac{7}{5}$	$x$
<hr/>		
7 zile	1	9 ore
1 zi	1	$9 \times 7$ ore
5 zile	$\frac{7}{5}$	$\frac{9 \times 7}{5} \cdot \frac{5}{7} = 9$ ore.

Deci  $x = 9$  ore.



*Metoda proporțiilor*

$$7 \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots 9 \text{ ore}$$

$$5 \dots\dots\dots \frac{7}{5} \dots\dots\dots x$$

Reducem problema la o problemă de regulă de trei simplă prin egalarea valorilor unei mărimi.

$$7 \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots 9 \text{ ore}$$

$$5 \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots y.$$

Numărul zilelor și al orelor pe zi fiind invers proporționale, putem scrie

$$\frac{7}{5} = \frac{y}{9}; \quad y = \frac{7 \times 9}{5}.$$

Formăm o nouă problemă în care folosim valoarea găsită pentru  $y$ .

$$5 \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots \frac{7 \times 9}{5}$$

$$5 \dots\dots\dots \frac{7}{5} \dots\dots\dots x.$$

$$\text{Deci } \frac{1}{\frac{7}{5}} = \frac{x}{\frac{7 \times 9}{5}} \quad \text{de unde } x = 9 \text{ ore.}$$



# XI

## Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor

Pentru a rezolva o problemă cu ajutorul ecuațiilor, parcurgem mai multe etape.

1. Stabilim mărimile despre care este vorba în problemă, ce relație există între aceste mărimi, ce valori ale acestor mărimi sînt date și ce valori sînt necunoscute. Din aceste valori necunoscute alegem pe acelea pe care le vom nota cu litere (de obicei cu litere de la sfîrșitul alfabetului  $x, y, z$ ) și pe care le vom considera în raționamentele noastre cunoscute.

2. Exprimăm celelalte valori necunoscute din problemă cu ajutorul datelor cunoscute și a celor pe care le-am notat cu litere ( $x, y, z$ ).

3. Formarea ecuațiilor: scrierea simbolică a relațiilor date în problemă între diferite valori ale mărimilor. Este bine să urmărim în ecuațiile scrise dacă am egalat mărimi de același fel, exprimate cu aceeași unitate de măsură.

4. Rezolvarea ecuației. Stabilirea răspunsului la problema dată. Interpretarea soluției (dacă e cazul).

5. Discuția soluției dacă constantele problemei sînt date literale.

6. Verificarea soluției în problemă.

### Exemple

1. De la o exploatare forestieră se trimit din cantitatea de lemne tăiate 10 steri, se mai taie o cantitate egală cu cantitatea rămasă și se mai trimit 30 steri; se mai taie de trei ori cantitatea care a rămas după ultimul transport și se mai trimit 360 steri. În acest fel a rămas neexpediată o cantitate egală cu cea inițială. Ce cantitate de lemne a fost inițial?

Notăm cantitatea inițială în steri cu  $x$ . Pe baza relațiilor din problemă exprimăm celelalte date.

După ce s-au trimis 10 s au rămas  $x - 10$

Se dublează cantitatea  $2(x - 10)$

Se mai trimit 30 s deci rămîn  $2x - 20 - 30 = 2x - 50$

Se taie de trei ori mai mult decît a rămas; deci se obține în total  $4(2x - 50)$

Se mai trimit 360 s și rămîn  $4(2x - 50) - 360$ .

Acest ultim rest este egal cu cantitatea inițială.

Scriem această relație (Ecuația problemei):

$$4(2x - 50) - 360 = x.$$

Rezolvăm ecuația:  $8x - x = 560;$

$$7x = 560; \quad x = 80.$$

Verificarea în problemă se face ca și în aritmetică înlocuind valoarea găsită în locul necunoscutei din problemă.

Au fost 80 s și s-au trimis 10 s rămân 70 s. Se mai taie 70 s deci vor fi  $70 \cdot 2 = 140$  s. Din 140 s se mai trimit 30 s rămân  $140 - 30 = 110$  s. Se mai taie de 3 ori 110 deci vor fi  $3 \cdot 110 + 110 = 440$  s. Se trimit din cei 440 s, 360 s și rămân  $440 - 360 = 80$  adică tot cât a fost inițial.

Inițial au fost 80 steri de lemn.

2. Două robinete curgînd împreună pot umple un bazin în 8 ore. Cele două robinete au fost deschise timp de 2 ore apoi s-a închis primul robinet și bazinul s-a umplut în 18 ore de la închiderea primului robinet. În cît timp ar umple bazinul fiecare robinet?

Capacitatea bazinului nu e cunoscută și nu interesează în problemă, dar într-un anumit timp se umple o anumită parte din el. Vom considera bazinul ca un întreg.

a) Notăm timpul în ore necesare primului robinet să umple singur bazinul

cu

Timpul necesar celui de-al doilea cu

Atunci într-o oră primul umple

iar al doilea umple

Împreună într-o oră umplu

Exprimăm relațiile date în problemă:

$$\begin{cases} 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{18}{y} = 1 \\ 8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1. \end{cases}$$

Rezolvăm sistemul folosind introducerea unei necunoscute noi  $\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v$ .

$$\begin{cases} 2u + 20v = 1 \\ 8u + 8v = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} -4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{cases} -8u - 80v = -4 \\ 8u + 8v = 1 \end{cases}$$

$$-72v = -3$$

$$v = \frac{3}{72}; \quad v = \frac{1}{24}.$$

$$2u = 1 - \frac{20}{24}$$

$$2u = 1 - \frac{5}{6}$$

$$2u = \frac{1}{6}, \quad u = \frac{1}{12}.$$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{12} \\ v = \frac{1}{24} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 12 \\ y = 24 \end{cases}$$

b) Problema se putea rezolva considerînd ca necunoscută nu timpul (ceea ce se cere în problemă) ci partea din bazin pe care o umple într-o oră fiecare robinet.

Într-o oră primul robinet umple  $x$  părți din bazin (unități fracționare). Într-o oră al doilea robinet umple  $y$  părți din bazin. Deci împreună într-o oră  $(x + y)$  părți.

În 8 ore se va umple bazinul. Deci:

$$8(x + y) = 1.$$

Primul curge 2 ore deci umple  $2x$  părți.  
 Al doilea curge  $(18 + 2 = 20)$  20 ore deci  $20y$  părți.  
 Suma acestor părți este egală cu un întreg.

$$2x + 20y = 1.$$

Formăm sistemul:

$$\begin{cases} 8x + 8y = 1 \\ 2x + 20y = 1 \end{cases}$$

care a fost rezolvat (în  $u$  și  $v$ ) deci  $x = \frac{1}{12}$ ,  $y = \frac{1}{24}$ .

Dacă într-o oră primul robinet umple  $\frac{1}{12}$  din bazin, atunci întregul bazin se va umple în  $1 : \frac{1}{12} = 12$  ore iar al doilea în  $1 : \frac{1}{24} = 24$  (ore).

Verificare. Ambele bazine umplu într-o oră:  $\frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$  (din bazin); deci bazinul întreg în  $1 : \frac{1}{8} = 8$  (ore); în două ore ambele,  $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ ; în 18 ore al doilea,  $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ .

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

3. Pentru încărcarea a 9,6 tone de nisip s-au trimis mai mulți muncitori: doi dintre ei au avut de executat altă lucrare și de aceea fiecare din muncitorii rămași a trebuit să încarce cu 0,24 tone mai mult decât era prevăzut inițial. Câți oameni au încărcat nisipul?

Să notăm, de exemplu, numărul muncitorilor trimiși cu  $x$ .

Pentru exprimarea celorlalte date folosim, pentru ușurință, un tabel de forma.

Cantitatea totală (în tone)		Nr. muncitorilor	Norma (în tone/m)
Planificat	9,6	$x$	$\frac{9,6}{x}$
Realizat	9,6	$x - 2$	$\frac{9,6}{x - 2}$

Diferența dintre norma realizată și cea planificată este de 0,24 tone.

$$\frac{9,6}{x - 2} - \frac{9,6}{x} = 0,24 \text{ (ecuația problemei)}$$

$x \neq 0$ ,  $x \neq 2$ . (În problemă, numărul muncitorilor trebuie să fie mai mare decât 2). Eliminăm numitorii, în prealabil împărțim în ambii membri cu 0,24.

$$40x - 40(x - 2) = x(x - 2).$$

$$40x - 40x + 80 = x^2 - 2x \quad \text{deci}$$

$$x^2 - 2x - 80 = 0,$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1 + 80}, \quad x = 1 \pm 9.$$

Ecuatia are rădăcinile  $x_1 = -8$ ,  $x_2 = 10$ .

Rădăcina ecuației  $x = -8$  nu are sens în problemă. Rămâne  $x = 10$ ; deci au fost 10 muncitori.

Problema mai poate fi rezolvată notind norma planificată cu  $x$ . În acest caz norma efectuată este  $x + 0,24$ .

Numărul muncitorilor planificat inițial:  $\frac{9,6}{x}$ .

Numărul muncitorilor care au lucrat efectiv:  $\frac{9,6}{x + 0,24}$ .

Ecuatia exprimă că numărul muncitorilor care au efectuat lucrarea a fost cu 2 mai mic decât cel planificat.

$$\frac{9,6}{x} - \frac{9,6}{x + 0,24} = 2$$

$x > 0$  deci  $x \neq 0$  și  $x + 0,24 \neq 0$ .

$$4,8(x + 0,24) - 4,8x = x^2 + 0,24x,$$

$$x^2 + 0,24x - 1,152 = 0,$$

$$x = -0,12 \pm \sqrt{0,0144 + 1,152} = -0,12 \pm 1,08; x_1 = 0,96, x_2 = -1,20.$$

Norma nu poate fi negativă deci  $x = 0,96$ .

Numărul de oameni planificat:  $9,6 : 0,96 = 10$ .

Nisipul a fost încărcat de 8 oameni.

*Observare.* Deși raționamentul este același, se vede că, în al doilea caz, am avut calcule mai lungi, deci este preferabil să luăm ca necunoscută de bază numărul muncitorilor.

*Verificare.* Norma planificată pentru un muncitor este  $\frac{9,6}{10} = 0,96$ .

Norma efectuată de un muncitor  $\frac{9,6}{8} = 1,2$ .

$$1,2 - 0,96 = 0,24.$$

4. La 6 litri spirt cu tăria de 32 grade se adaugă spirt cu tăria de 80 grade și se obține un amestec cu tăria de 40 grade. Ce cantitate de spirt s-a adăugat?

Notăm cu  $x$  cantitatea de spirt adăugată.

Cantitatea de spirt (în litri)	Tăria în procente	Cantitatea de alcool (în litri)
Inițial 6	32%	$6 \cdot \frac{32}{100} = 1,92$
$x$	80%	$\frac{80}{100} x = 0,8x$
După amestec $6 + x$	40%	$\frac{40}{100} (6 + x) = 0,4(6 + x)$



Cantitatea de alcool din amestec este egală cu suma cantităților de alcool din cele două calități de spirt.

$$1,92 + 0,8x = 0,4(6 + x),$$

$$0,4x = 0,48, \quad x = 1,2.$$

Așadar s-au adăugat 1,2 l spirt cu tăria de 80 grade.

*Verificare:* Cantitatea de alcool din amestec

$$I \quad 6 \cdot \frac{32}{100} + \frac{80}{100} \cdot 1,2 = 1,92 + 0,96 = 2,88.$$

$$II \quad (6 + 1,2) \frac{40}{100} = 7,2 \cdot \frac{4}{10} = 2,88.$$

5. Trei băieți au cumpărat cu 43 lei o minge. Primul băiat a dat o treime din suma pe care o avea, al doilea, care avea o sumă de două ori mai mare decât primul, a dat numai  $\frac{1}{5}$  din suma pe care o avea, iar al treilea, care avea cu 5 lei mai puțin decât primul a dat  $\frac{1}{4}$  din suma pe care o avea. Ce sume au avut cei trei băieți?

Considerăm cunoscută suma pe care a avut-o primul și o notăm cu  $x$  deci: primul băiat are  $x$  lei, al doilea băiat are  $2x$  lei (de două ori mai mult), al treilea băiat are  $(x - 5)$  lei (cu 5 lei mai puțin).

Sumele date de fiecare sînt:  $\frac{x}{3}, \frac{2x}{5}, \frac{x-5}{4}$ .

Scriem că împreună au strîns 43 lei

$$\begin{array}{r} 20) \quad 12) \quad 15) \quad 60) \\ \frac{x}{3} + \frac{2x}{5} + \frac{x-5}{4} = 43. \end{array}$$

Am pus problema în ecuație. Rezolvăm ecuația. Eliminăm numitorii

$$20x + 24x + 15x - 75 = 2580,$$

$$59x = 2655,$$

$$x = \frac{2655}{59}; \quad x = 45.$$

Primul băiat a avut  $x$  lei deci 45 lei. Al doilea a avut  $2x$  lei deci 90 lei. Al treilea a avut  $(x - 5)$  lei deci 40 lei.

$$\text{Verificare: } \frac{1}{3} \cdot 45 = 15; \frac{1}{5} \cdot 90 = 18; \frac{1}{4} \cdot 40 = 10.$$

În total au dat  $15 + 18 + 10 = 43$  (lei).

6. Un gospodar are o răsadniță în formă de pătrat și socotește că, dacă ar pune în fiecare rînd cu 3 răsaduri mai mult și ar mări cu 3 numărul rîndurilor, ar încăpea în răsadniță cu 219 răsaduri mai mult. Cîte răsaduri erau inițial pe un rînd? (Răsadurile sînt puse la aceeași distanță unul de altul și pe rînduri și pe coloane.)

Numărul răsadurilor pe rând este  $x$ ; numărul rândurilor,  $x$ ; numărul total al răsadurilor va fi  $x \cdot x = x^2$ .

Dacă mărim numărul răsadurilor avem:  $(x + 3)^2$

Numărul total al răsadurilor crește cu 219 deci:

$$(x + 3)^2 - x^2 = 219.$$

$$x^2 + 6x + 9 - x^2 = 219,$$

$$6x = 210, \quad x = \frac{210}{6}, \quad x = 35.$$

Inițial au fost 35 rânduri cu câte 35 răsaduri.

Verificare. Inițial au fost

$$35 \times 35 = 1\,225.$$

După mărirea numărului de răsaduri

$$38 \times 38 = 1\,444.$$

S-a pus deci mai mult cu

$$1\,444 - 1\,225 = 219 \text{ (răsaduri).}$$

7. O brigadă de tractoriști trebuia să execute o lucrare într-un anumit număr de zile. Dacă ar fi fost cu 3 tractoriști mai puțin, lucrarea s-ar fi terminat cu 6 zile mai târziu, dar le-au mai sosit 2 tractoriști în plus și au terminat cu 2 zile mai devreme. Câți membri erau la început și câte zile le-ar fi fost necesare?

Numărul muncitorilor din brigadă:  $x$ .

Numărul zilelor planificate:  $y$ .

Numărul de zile necesare unui singur muncitor pentru a efectua lucrarea este  $x \cdot y$ .

Însă  $xy = (x - 3)(y + 6) = (x + 2)(y - 2).$

Avem două semne egale deci 2 ecuații:

$$1) \quad \begin{cases} (x - 3)(y + 6) = xy \\ (x + 2)(y - 2) = xy \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} 6x - 3y = 18 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases} \quad 3) \quad \begin{cases} 6x - 3y = 18 \\ -6x + 6y = 12 \end{cases}$$

---

$$3y = 30$$

$$y = 10; \quad x = y - 2, \quad x = 10 - 2$$

$$x = 8.$$

Răspuns: inițial au fost 8 muncitori și trebuiau să lucreze 10 zile.

Verificare: inițial unui singur muncitor îi erau necesare  $10 \cdot 8 = 80$  zile de muncă,

a două oară,  $16 \cdot 5 = 80$  (zile de muncă),

a treia oară,  $8 \cdot 10 = 80$  (zile de muncă).

8. Se știe că: 3 penițe, 5 creioane și 4 caiete costă 8,75 lei. 5 penițe, 4 creioane și 3 caiete costă 7,05 lei iar 4 penițe, 3 creioane și 5 caiete costă 8,20 lei. Cât costă un caiet, un creion și o peniță?

Notăm costul unei penițe cu  $x$ , costul unui creion cu  $y$ , costul unui caiet cu  $z$ .  
Obținem sistemul:

$$(1) \begin{cases} 3x + 5y + 4z = 8,75 \\ 5x + 4y + 3z = 7,05 \\ 4x + 3y + 5z = 8,20 \end{cases}$$

care se poate rezolva prin una din metodele cunoscute (substituție sau reducere).  
Observăm însă că adunând membru cu membru cele trei ecuații obținem ecuație mai simplă

$$12(x + y + z) = 24 \quad \text{deci} \quad x + y + z = 2.$$

Înlocuim una din ecuațiile sistemului cu această ecuație.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 5x + 4y + 3z = 7,05 \\ 4x + 3y + 5z = 8,20. \end{cases} \quad \begin{array}{c} -5 \\ -4 \end{array} \quad \begin{array}{c} -4 \\ -5 \end{array}$$

Reducem pe  $x$  din prima și a doua ecuație apoi din prima și a treia și formăm sistemul echivalent în care două ecuații au numai două necunoscute ( $y$  și  $z$ ).

$$\begin{cases} y + 2z = 2,95 \\ -y + z = 0,2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 3z = 3,15, \\ y = 1,05 - 0,2, \end{array} \quad \begin{array}{l} z = 1,05 \\ y = 0,85 \end{array}$$

$$x = 2 - 1,90 = 0,10.$$

Au costat: o peniță 0,10 lei, un creion 0,85 lei, un caiet 1,05 lei.

Verificare.

$$0,10 \cdot 3 + 0,85 \cdot 5 + 1,05 \cdot 4 = 0,30 + 4,25 + 4,20 = 8,75.$$

$$0,10 \cdot 5 + 0,85 \cdot 4 + 1,05 \cdot 3 = 0,50 + 3,40 + 3,15 = 7,05.$$

$$0,10 \cdot 4 + 0,85 \cdot 3 + 1,05 \cdot 5 = 0,40 + 2,55 + 5,25 = 8,20.$$

9. După trei reduceri consecutive de prețuri cu același procent, un aparat de radio, care costa inițial 2000 lei, costă 1458 lei. Cu câte procente s-a făcut de fiecare dată reducerea?

Notăm numărul procentelor cu  $x$  și costul inițial cu  $a_1$ .

Prima reducere valorează  $\frac{a_1 x}{100}$  iar costul după prima reducere,

$$a_2 = a_1 - \frac{a_1 x}{100} = \frac{a_1}{100} (100 - x).$$

A doua reducere valorează  $\frac{x}{100} \cdot a_2$  iar costul după a doua reducere,

$$a_3 = \frac{a_2}{100} (100 - x) \text{ sau înlocuind pe } a_2 = \frac{a_1}{100} (100 - x),$$

$$a_3 = \frac{a_1}{100^2} (100 - x)^2.$$

A treia reducere valorează  $\frac{a_3 x}{100}$  iar costul după o a treia reducere

$$a_4 = a_3 - \frac{a_3 x}{100} = \frac{a_3}{100} (100 - x) \text{ sau înlocuind pe } a_3 = \frac{a_1}{100} \cdot (100 - x)^2,$$

$$a_4 = \frac{a_1}{100^3} (100 - x)^3 \text{ sau } \frac{a_4}{a_1} = \left( \frac{100 - x}{100} \right)^3.$$

Înlocuind cu datele din problemă obținem ecuația:

$$\frac{1\,458}{2\,000} = \left( \frac{100 - x}{100} \right)^3.$$

de unde  $\frac{100 - x}{100} = \sqrt[3]{\frac{1\,458}{2\,000}}$  sau simplificând fracția  $\frac{1\,458}{2\,000}$ :

$$\frac{1\,458}{2\,000} = \frac{729}{1\,000} = \frac{9^3}{10^3}. \text{ Obținem:}$$

$$\frac{100 - x}{100} = \sqrt[3]{\frac{9^3}{10^3}}; \frac{100 - x}{100} = \frac{9}{10}.$$

Formăm o proporție derivată:

$$\frac{100 - (100 - x)}{100} = \frac{10 - 9}{10}; \quad \frac{x}{100} = \frac{1}{10}.$$

$$x = 10.$$

**Răspuns:** de fiecare dată s-a făcut o reducere de 10%.

**Verificare:** După prima reducere:  $2\,000 - \frac{10}{100} \cdot 2\,000 = 1\,800$  lei.

După a doua reducere:  $1\,800 - \frac{10}{100} \cdot 1\,800 = 1\,620$  lei.

După a treia reducere  $1\,620 - \frac{10}{100} \cdot 1\,620 = 1\,458$  lei.

**10.** Din A pleacă un pieton spre B; din B pleacă cu o oră mai târziu, un pieton spre A. În momentul întâlnirii pietonul din B făcuse cu 8 km mai mult decât celălalt. După întâlnire pietonul, care a plecat din A, ajunge în B după 5 ore, iar pietonul, care a plecat din B, ajunge în A după 2 ore și 24 minute. Să se afle vitezele celor doi pietoni.

Notînd distanța AC (de la A la punctul de întâlnire) cu  $x$  putem exprima vitezele celor doi pietoni. După întâlnire primul parcurge  $(x + 8)$  km în 5 ore deci cu viteza  $\frac{x + 8}{5} = v_1$ .

Al doilea parcurge distanța în  $2 \frac{24}{60} = 2 \frac{2}{5}$  ore deci cu viteza  $\frac{x}{\frac{12}{5}} = \frac{5x}{12} = v_2$ .



Cunoscând distanțele și vitezele pînă la momentul întîlnirii exprimăm timpul necesar fiecărui pieton.

$$t_1 = \frac{x}{x+8}, \quad t_1 = \frac{5x}{x+8}, \quad t_2 = \frac{x+8}{5x},$$

$$t_2 = \frac{12(x+8)}{5x}.$$

Pietonul din A face cu o oră mai puțin decî:

$$\frac{5x}{x+8} + 1 = \frac{12(x+8)}{5x}, \quad x \neq 0, \quad x+8 \neq 0 \quad (x > 0).$$

$$25x^2 + 5x^2 + 40x = 12(x^2 + 16x + 64),$$

$$18x^2 - 152x - 768 = 0, \quad 9x^2 - 76x - 384 = 0,$$

$$x = \frac{38 \pm \sqrt{1444 + 3456}}{9},$$

$$x = \frac{38 \pm 70}{9}; \quad x_1 = 12; \quad x_2 = -\frac{32}{9}.$$

Dar  $x > 0$  deci  $x = 12$ .  $v_1 = \frac{20}{5} = 4$ ,  $v_1 = 4$  km/oră,

$$v_2 = \frac{5 \cdot 12}{12}, \quad v_2 = 5 \text{ km/oră}.$$

Verificare.  $t_1 = \frac{12}{4}$ ,  $t_2 = \frac{20}{5}$ ;  $t_2 - t_1 = 4 - 3 = 1$ .

$$CB = 4 \cdot 5 = 20,$$

$$AC = 5 \cdot \frac{12}{5} = 12; \quad 20 - 12 = 8.$$

11. Pentru strîngerea recoltei pînă la termenul planificat trebuiau să lucreze două brigăzi. Prima a lucrat pe un lot de 200 ha și a terminat strîngerea recoltei cu o zi înainte de termenul fixat; a doua a lucrat pe un lot de 450 ha și a terminat cu o zi după termenul fixat. Dacă prima brigadă ar fi lucrat atîtea zile cît a lucrat cea de-a doua brigadă iar a doua atîtea zile cît a lucrat prima, cele două brigăzi ar fi strîns recolta de pe două loturi de aceeași arie. Să se afle în cîte zile a fost planificată strîngerea recoltei.

Notăm timpul planificat în zile cu  $x$ .

Aria în hectare. Timpul în zile. Numărul de hectare lucrate pe zi.

Planificat:	650	$x$	
Realizat: Brigada I	200	$x - 1$	$\frac{200}{x - 1}$
Brigada a II-a	450	$x + 1$	$\frac{450}{x + 1}$

Putem exprima aria de pe care ar fi strîns recolta fiecare brigadă în condițiile schimbate.

Numărul de hectare lucrate  
pe zi.

Timpul în zile.

Aria în hectare.

$$\text{Brigada I} \quad \frac{200}{x-1}$$

$$x+1$$

$$\frac{200}{x-1}(x+1)$$

$$\text{Brigada a II-a} \quad \frac{450}{x+1}$$

$$x-1$$

$$\frac{450}{x+1}(x-1).$$

Cele două arii sînt egale deci:

$$\frac{200}{x-1}(x+1) - \frac{450}{x+1}(x-1) = 0, \quad x > 1 \text{ deci } x-1 \neq 0, x+1 \neq 0.$$

$$4(x+1)^2 - 9(x-1)^2 = 0,$$

de unde

$$(5x-1)(-x+5) = 0.$$

$$x_1 = \frac{1}{5} \text{ nu este soluție căci } x > 1. \quad x_2 = 5.$$

Timpul planificat a fost de 5 zile.

**12.** Două mobile se mișcă uniform pe un cerc cu lungimea  $l$  pornind din același punct. Dacă merg amîndouă în același sens se întîlnesc după  $a$  minute; dacă merg în sens contrar se întîlnesc după  $b$  minute. Ce viteză au cele două mobile?

1. Dacă mobilele merg în același sens în fiecare minut cel cu viteza mai mare parcurge mai mult un anumit arc. Ele se vor întîlni cînd diferența distanțelor parcurse devine egală cu lungimea cercului.

2. Dacă mobilele merg în sens contrar ele se întîlnesc cînd suma distanțelor parcurse este egală cu lungimea cercului.

Notăm viteza primului cu  $v_1$  și viteza celui de al doilea cu  $v_2$ .

Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} av_1 - av_2 = l \\ bv_1 + bv_2 = l \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} v_1 - v_2 = \frac{l}{a} \\ v_1 + v_2 = \frac{l}{b} \end{cases}$$

$$2v_1 = \frac{l}{a} + \frac{l}{b}; \quad v_1 = \frac{l}{2} \cdot \frac{a+b}{ab}, \quad (a \neq 0, b \neq 0),$$

$$2v_2 = \frac{l}{b} - \frac{l}{a}, \quad v_2 = \frac{l}{2} \cdot \frac{a-b}{ab}.$$

Să se calculeze vitezele în cazul  $l = 210$  m,  $a = 35$  minute,  $b = 15$  minute.

$$v_1 = \frac{210}{2} \cdot \frac{35 + 15}{35 \cdot 15}, \quad v_1 = \frac{210}{2} \cdot \frac{50}{35 \cdot 15}, \quad v_1 = 10.$$

$$v_2 = \frac{210}{2} \cdot \frac{20}{35 \cdot 15}, \quad v_2 = 4.$$

13. Într-un număr de trei cifre divizibil cu 9 și cu 11, numărul reprezentat prin cifra sutelor este dublul unităților iar diferența dintre acest număr și numărul obținut schimbând cifra unităților și cifra sutelor între ele este 297. Să se afle acest număr.

Notînd cifrele cu  $s$ ,  $z$ ,  $u$ , numărul este

$$N = 100s + 10z + u.$$

Numărul obținut schimbînd locul cifrelor unităților și sutelor, este

$$N' = 100u + 10z + s.$$

Relațiile date sînt:

$$\begin{cases} 100s + 10z + u - 100u - 10z - s = 297, \\ s = 2u \end{cases}$$

$$\begin{cases} 99s - 99u = 297, \\ s = 2u \end{cases}, \quad \begin{cases} s - u = 3, \\ s = 2u \end{cases}, \quad \begin{cases} u = 3, \\ s = 6. \end{cases}$$

Cifra zecilor trebuie să fie determinată prin condițiile de care nu am ținut seama.

Numărul este divizibil cu 9; dacă  $(3 + 6 + z) : 9$

deci  $z = 0$  sau  $z = 9$ . Numărul poate fi:

$$N_1 = 603 \quad \text{sau} \quad N_2 = 693.$$

$$\text{Dar } 603 = 9 \cdot 67, \quad 693 = 3^2 \cdot 11 \cdot 7.$$

Numărul căutat este 693.

$$\text{Verificare.} \quad 693 : 9; \quad 693 : 11.$$

$$693 - 396 = 297.$$

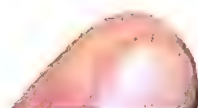
14. Un număr de două cifre este de 7 ori mai mare decît suma numerelor reprezentate prin cifrele sale, iar raportul dintre acest număr și răsturnatul său (numărul obținut prin schimbarea locului cifrelor) este  $\frac{7}{6}$ . Să se afle numărul dacă

1) Numărul este divizibil cu 9 și cu 7.

2) Numărul este divizibil cu  $2^2$  și cu 7.

Notînd cu  $z$  și  $u$  cifrele numărului, numărul este

$$N = 10z + u.$$



Relațiile date în problemă sînt:

$$\begin{cases} 10z + u = 7(z + u) \\ \frac{10z + u}{10u + z} = \frac{7}{6}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3z - 6u = 0 \\ 60z + 6u - 70u - 7z = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z - 2u = 0 \\ 33z - 66u = 0, \end{cases}$$

Cele două ecuații se reduc la una singură. Toate numerele în care  $z = 2u$  verifică relațiile. Aceste numere sînt: ( $u < 5$ , deci  $u \leq 4$ ) 21; 42; 63; 84; pentru  $u = 1$ ,  $u = 2$ ,  $u = 3$ ,  $u = 4$ .

1) Numărul divizibil cu 9 și cu 7 este  $N = 63 = 9 \cdot 7$ .

2) Numărul divizibil cu  $2^2$  și cu 7 este  $N = 84 = 2^2 \cdot 7 \cdot 3$ .



## I Noțiuni introductive

### Propoziții matematice

În matematică folosim următoarele propoziții:

1° *Axiomele* sînt propoziții admise fără demonstrație. De cele mai multe ori sînt stabilite pe baze experimentale și verificate în practică.

Exemplu: două cantități egale cu a treia sînt egale între ele.

2° *Definițiile* sînt propoziții prin care se introduce o noțiune nouă cu ajutorul unei noțiuni cunoscute (care cuprinde noțiunea pe care o definim ca un caz particular) și a proprietăților caracteristice noțiunii pe care o definim. Aceste proprietăți delimitează, din mulțimea elementelor noțiunii cunoscute, pe acelea care sînt cuprinse în noțiunea pe care o definim.

Exemplu. După ce s-a definit linia frîntă, definim poligonul ca linia frîntă închisă, apoi patrulaterul ca poligonul care are patru laturi, apoi paralelogramul ca patrulaterul care are laturile paralele două cîte două ș.a.m.d.

3° *Teoremele* sînt propoziții formate din două părți: *ipoteza* și *concluzia*. Ipoteza cuprinde anumite relații care reprezintă condițiile suficiente pentru ca relațiile din concluzie să fie satisfăcute.

A demonstra o teoremă înseamnă a stabili, prin raționament, relațiile din concluzia teoremei pe baza relațiilor din ipoteză și a unor propoziții cunoscute.

Unele propoziții sînt adevărate, altele false. Teoremele sînt propoziții adevărate; adică, dacă condițiile din ipoteză sînt îndeplinite atunci și relațiile din concluzie sînt satisfăcute (în condițiile date).

Dintr-o teoremă dată putem forma alte două propoziții care pot fi adevărate sau false: *reciproca* și *contrara* teoremei date.

Propoziția reciprocă a unei teoreme date se formează luînd ca ipoteză relațiile sau o parte din relațiile cuprinse în concluzia teoremei și drept concluzie relațiile sau o parte din relațiile cuprinse în ipoteza teoremei.

Propoziția contrară a unei teoreme se formează negînd atît ipoteza (sau o parte din ea) cît și concluzia teoremei date (sau o parte din ea). La fiecare reciprocă a unei teoreme corespunde o contrară a teoremei care se obține negînd în teorema dată rela-

țiile pe care le-am trecut din ipoteză în concluzie și din concluzie în ipoteză pentru a forma propoziția reciprocă corespunzătoare.

*Exemple.*

1) Din teorema: „dacă un patrulater este înscris într-un cerc atunci unghiurile opuse sînt suplementare” se formează *reciproca*: „dacă într-un patrulater unghiurile opuse sînt suplementare atunci patrulaterul este înscritibil (poate fi înscris într-un cerc)” și *contrara*: „dacă un patrulater nu poate fi înscris într-un cerc atunci unghiurile opuse nu sînt suplementare”. Ambele propoziții, reciprocă și contrară, sînt adevărate: ele sînt teoreme.

2) Din teorema: „dacă două unghiuri sînt drepte atunci ele sînt egale” se formează *reciproca*: „dacă două unghiuri sînt egale atunci ele sînt drepte”.

Această propoziție este falsă; există unghiuri egale care nu sînt unghiuri drepte.

*Contrara*: „dacă două unghiuri nu sînt unghiuri drepte atunci ele nu sînt egale”.

Și această propoziție este falsă.

3) Din teorema: „dacă un patrulater  $ABCD$  este paralelogram atunci laturile opuse sînt egale două cîte două”, putem forma mai multe propoziții reciproce respectiv contrare. Scriem simbolic teorema dată.

ipoteza: 1)  $AB \parallel CD$

2)  $AD \parallel BC$

concluzia: 1)  $AB = CD$

2)  $AD = BC$

Formăm reciprocele înlocuind relațiile sau una din relațiile din ipoteză cu relațiile sau una din relațiile din concluzie:

*Reciproca I.* „Dacă un patrulater are laturile opuse, două cîte două egale, atunci patrulaterul este paralelogram”.

ipoteza: 1)  $AB = CD$

2)  $AD = BC$

concluzia: 1)  $AB \parallel CD$

2)  $AD \parallel BC$ .

Această propoziție este adevărată, ea poate fi demonstrată.

*Reciproca a II-a.* „Dacă un patrulater are două laturi opuse paralele și egale atunci patrulaterul este paralelogram”.

ipoteza: 1)  $AB \parallel CD$

2)  $AB = CD$

concluzia:  $AD \parallel BC$ .

Această propoziție este adevărată.

*Reciproca a III-a.* Dacă un patrulater are două laturi paralele și celelalte două laturi egale atunci patrulaterul este paralelogram.

ipoteza: 1)  $AB \parallel CD$

2)  $AD = BC$

concluzia:  $AD \parallel BC$ .

Această propoziție nu este adevărată, este falsă. În adevăr, există patrulatere care au două laturi paralele și celelalte două egale care nu sînt paralelograme ci trapeze isoscele.

Din teorema dată se pot obține propozițiile contrare corespunzătoare celor trei reciproce.

*Contrara I.* Dacă un patrulater nu este paralelogram atunci el nu are laturile opuse egale, două câte două.

Propoziția este adevărată.

*Contrara a II-a.* Dacă un patrulater are două laturi paralele și celelalte două neperalele, atunci laturile paralele sînt neegale. Propoziția este adevărată.

*Contrara a III-a.* Dacă un patrulater are două laturi paralele și celelalte două neperalele atunci laturile neperalele nu sînt egale.

Această propoziție este falsă.

În general, dacă ipoteza unei teoreme cuprinde mai multe relații, putem forma mai multe propoziții reciproce, unele adevărate altele false; fiecărei propoziții reciproce îi corespunde o contrară a teoremei date. O propoziție reciprocă și contrara corespunzătoare reprezintă de fapt același lucru, ele sînt sau amîndouă adevărate sau amîndouă false.

*Noțiuni primare.* Noțiunea care nu se definește cu ajutorul altei noțiuni, se numește noțiune primară sau fundamentală. Aceste noțiuni se introduc prin anumite proprietăți care le caracterizează și care sînt date prin axiome.

Noțiunile de *punct*, *dreaptă*, *plan* sînt noțiuni primare. Ele sînt caracterizate de următoarele proprietăți:

1) Prin două puncte trece o dreaptă și numai una. Spunem că două puncte determină o dreaptă.

2) Dreapta este nemărginită.

3) Prin trei puncte necoliniare (un punct nu se găsește pe dreapta determinată de celelalte două) trece un plan și numai unul. Spunem că trei puncte necoliniare determină un plan.

4) Planul este nemărginit și alunecă pe el însuși.

5) Dreapta care unește două puncte oarecare ale planului este conținută în plan.

6) Dacă două plane au un punct comun, ele au încă un punct comun.

Din aceste proprietăți rezultă unele consecințe:

1) Două drepte diferite au cel mult un punct comun căci, dacă ar mai avea un punct comun ele s-ar confunda.

Două drepte dintr-un plan care nu au nici un punct comun se numesc paralele. Dacă dreptele nu au nici un punct comun și nu sînt în același plan, ele sînt drepte oarecare în spațiu. Prin două drepte paralele trece un plan și numai unul.

2) Un plan mai este determinat de:

a) O dreaptă și un punct care nu aparține dreptei.

Fie dreapta  $d$  și un punct exterior  $M$  iar  $A$  și  $B$  două puncte oarecare ale dreptei  $d$ . Punctele  $A, B, M$  determină un plan (proprietatea 3) dar dreapta  $d$ , avînd două puncte comune cu planul, aparține planului (proprietatea 5).

b) Două drepte concurente.

În adevăr, fie  $a$  și  $b$  două drepte concurente în  $A$ , dreapta  $a$  și un punct  $B$  al dreptei  $b$  determină un plan. Dreapta  $b$ , avînd două puncte  $A$  și  $B$  comune cu planul, aparține planului (proprietatea 5).

3) Printr-un punct trec cîte drepte vrem; printr-o dreaptă trec cîte plane vrem.

În adevăr, un punct fix și orice punct al spațiului determină o dreaptă, o dreaptă fixă și orice punct al spațiului determină un plan.

4) Dacă două plane diferite au un punct comun atunci ele se intersectează după o dreaptă.

În adevăr, avînd un punct comun ele mai au un punct comun (proprietatea 6). Aceste două puncte determină o dreaptă care e conținută în fiecare din cele două plane deci este o dreaptă comună celor două plane (proprietatea 5). Cele două plane



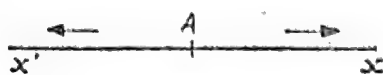


Fig. 1



Fig. 2

nu mai pot avea comun un punct exterior acestei drepte căci, dacă ar avea comun o dreaptă și un punct exterior drepte, ele s-ar confunda (consecința a doua).

5. O dreaptă care nu e conținută în plan poate avea cu planul cel mult un punct comun, în acest caz spunem că dreapta înțeapă planul.

Dacă dreapta nu are nici un punct comun cu planul spunem că dreapta este paralelă cu planul.

### Linie, suprafață, corp

Orice punct  $A$  care aparține unei drepte  $x'x$  determină pe dreaptă două semidrepte cu originea în  $A$ , semidreptele  $Ax$  și  $Ax'$  (fig. 1). Semidreapta  $Ax$  este mărginită la stînga și nemărginită la dreapta, semidreapta  $Ax'$  este mărginită la dreapta și nemărginită la stînga.

Două puncte oarecare  $A$  și  $B$  care aparțin unei drepte  $a$  determină un *segment de dreaptă* (o porțiune din dreaptă), segmentul  $AB$  care are originea, punctul  $A$  și extremitatea, punctul  $B$ .

Segmentul de dreaptă determinat de două puncte oarecare este drumul cel mai scurt dintre cele două puncte (fig. 2).

Numim *linie frîntă*, linia formată din mai multe segmente de dreaptă, puse cap la cap în direcții diferite (fig. 3, a).

Numim *poligon* o linie frîntă închisă (linia frîntă în care originea primului segment coincide cu extremitatea ultimului segment) (fig. 3, b, c). Poligonul se numește *convex* dacă dreapta obținută prin prelungirea oricărei laturi a poligonului nu taie poligonul (fig. 3, b) și *concav* dacă există cel puțin o latură care prelungită taie poligonul (fig. 3, c).

Un poligon cu trei laturi se numește triunghi, cu patru, patrulater, cu cinci, pentagon, cu șase exagon, cu șapte eptagon, cu opt octogon, cu nouă nonagon, cu zece, decagon, cu douăsprezece dodecagon. Un poligon care are toate vîrfurile într-un plan este un poligon plan.

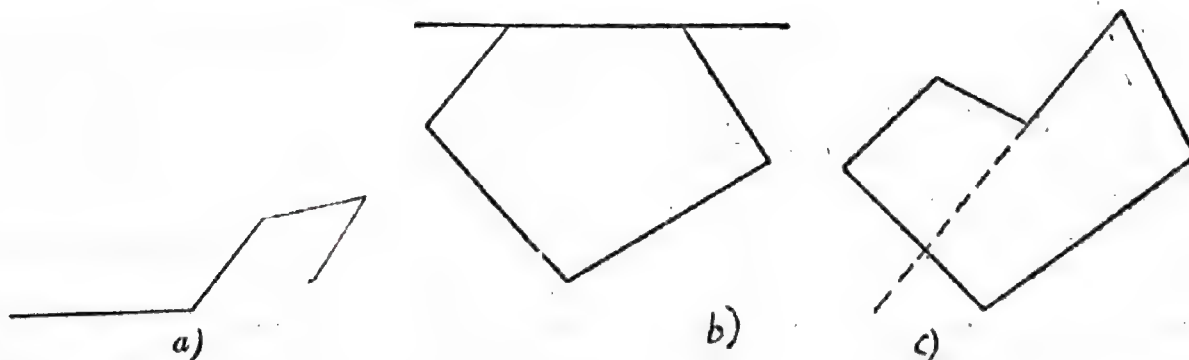


Fig. 3





Fig. 4

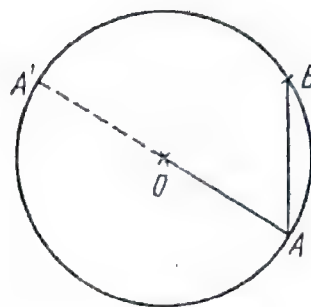


Fig. 5

O linie care nu e formată din segmente de dreaptă se numește linie curbă (fig. 4).

Un exemplu de linie curbă este cercul, linia formată din mulțimea punctelor din plan egal depărtate de un punct fix al planului numit centrul cercului.

Segmentul care unește centrul cu un punct al cercului se numește raza cercului. Segmentul care unește două puncte ale cercului se numește coardă. O coardă care trece prin centru se numește diametru. O porțiune din cerc cuprinsă între două puncte se numește arc de cerc. Două puncte  $A$  și  $B$  de pe cerc determină două arce (fig. 5).

Orice dreaptă care aparține unui plan determină două semiplane mărginite într-o parte de această dreaptă iar în cealaltă parte nemărginite.

Numim figură geometrică o mulțime de puncte, linii și suprafețe. Dacă toate punctele unei figuri sînt conținute într-un plan figura este plană, dacă punctele figurii, nu sînt situate toate într-un plan, este o figură în spațiu.

## Generarea liniilor și suprafețelor

Prin mișcarea unui punct ia naștere o linie, prin mișcarea unei linii ia naștere o suprafață.

1) O dreaptă care se mișcă paralel cu o dreaptă dată și se sprijină pe o dreaptă, un poligon plan, o curbă plană generează respectiv o suprafață plană sau un plan, o suprafață prismatică (fig. 6,  $a$ ), o suprafață cilindrică (fig. 6,  $b$ ).

Dreapta care se mișcă se numește *generatoare* iar curba pe care se sprijină se numește *curbă directoare*.

2) O dreaptă care trece printr-un punct fix și se sprijină pe o dreaptă; un poligon plan, o curbă plană, generează respectiv o suprafață plană sau un plan; o suprafață piramidală (fig. 6,  $c$ ); o suprafață conică (fig. 6,  $d$ ).

3) O dreaptă care se sprijină pe două drepte concurente sau paralele generează un plan.

Un plan se desenează convențional printr-un triunghi, paralelogram sau trapez.

*Observare.* O suprafață este plană dacă dreapta determinată de orice pereche de puncte ale suprafeței este conținută pe suprafață.

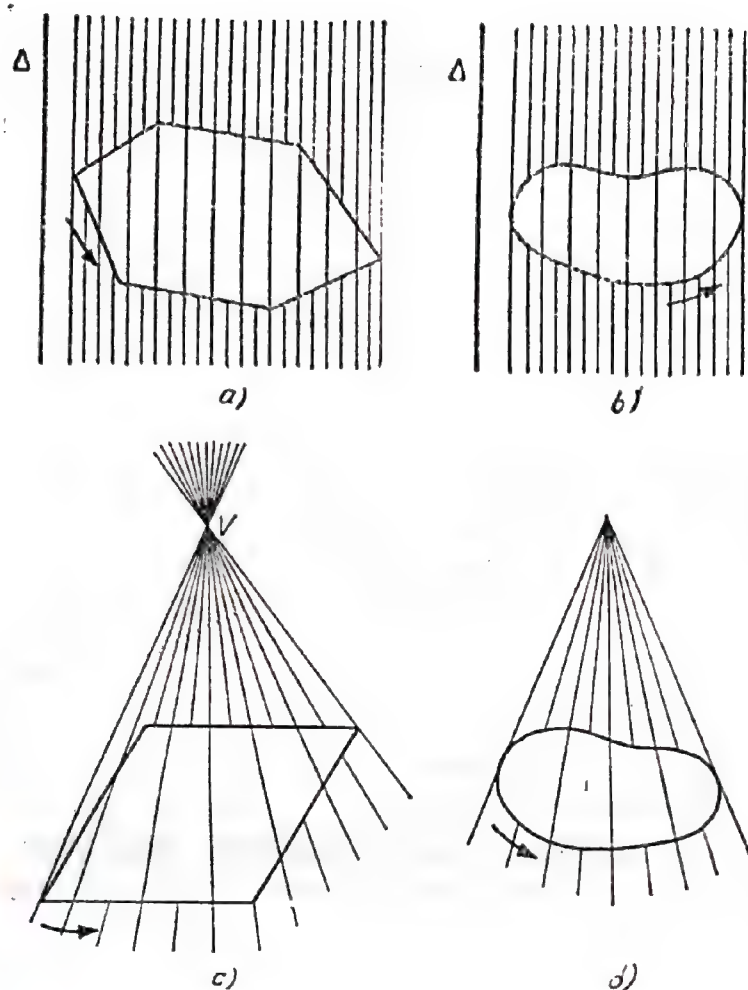


Fig. 6

## Corpuri geometrice

1) *Poliedre*. Numim poliedru, un corp limitat de fețe plane. Dintre poliedre noi vom studia:

a) *Prisma* este corpul obținut prin secționarea unei suprafețe prismatice prin două plane paralele care intersectează generatoarele suprafeței și este cuprins între cele două plane și suprafața prismatică. Prisma are două baze paralele poligoane oarecare obținute prin intersecția celor două plane cu suprafața prismatică, fețele laterale sînt paralelograme. Intersecția a două fețe laterale se numește muchie. Dacă muchiile sînt perpendiculare pe bază, prisma se numește dreaptă și fețele laterale sînt dreptunghiuri (fig. 7, a). Prisma care are ca baze paralelograme, se numește paralelipiped. Dacă paralelipipedul drept are ca baze dreptunghiuri, el se numește paralelipiped dreptunghic.

Numim diagonală într-o prismă (sau într-un trunchi de piramidă) segmentul de dreaptă care unește un vîrf al unei baze

cu un vîrf al celeilalte baze și nu este conținut într-o față laterală a prisme (sau a trunchiului de piramidă).

b) *Piramida* este corpul obținut prin secționarea unei suprafețe piramidale cu un plan care nu trece prin vîrfurile piramidei și care taie toate generatoarele suprafeței.

Piramida este corpul cuprins între vîrfurile suprafeței, planul de secțiune și suprafață. Fețele laterale sînt triunghiuri. Perpendiculara dusă din vîrf pe bază se numește înălțimea piramidei (fig. 7, b).

Dacă baza este un poligon regulat și înălțimea cade în centrul acestui poligon, avem o piramidă regulată.

c) Trunchiul de piramidă se obține secționînd o piramidă cu un plan paralel cu baza (fig. 7, c). Fețele laterale ale trunchiului de piramidă sînt trapeze.

2) *Corpurile rotunde*. Dintre acestea vom studia: cilindrul, conul, trunchiul de con, sfera.

a) *Cilindrul*, este obținut prin secționarea unei suprafețe cilindrice cu două plane paralele care taie generatoarele suprafeței. Dacă curba de secțiune este cerc, cilindrul se numește cilindru circular. Dacă generatoarele sînt perpendiculare pe planul de secțiune, cilindrul se numește cilindru drept. Noi vom studia cilindru circular drept și-l vom numi simplu cilindru (fig. 7, d).

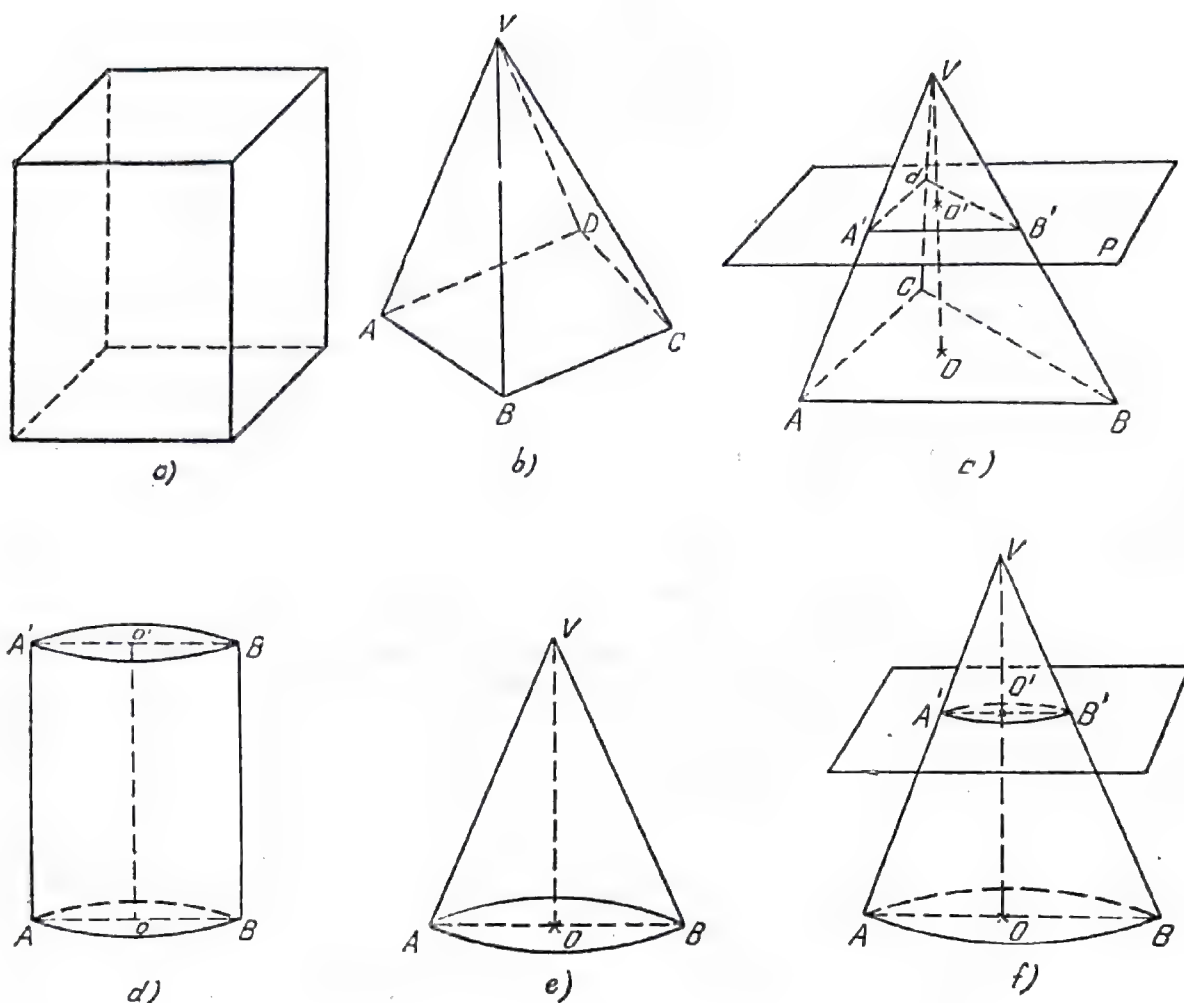


Fig. 7

b) *Conul* este obținut prin secționarea unei suprafețe conice cu un plan care nu trece prin vârful suprafeței și taie toate generatoarele suprafeței. Dacă curba de secțiune este cerc, conul se numește con circular. Dacă înălțimea conului (perpendiculara dusă din vârf pe planul bazei) intersectează baza în centrul cercului conul se numește con circular drept. Noi vom studia conul circular drept și-l vom numi simplu con (fig. 7, e).

c) *Trunchiul de con* se obține secționând conul cu un plan paralel cu baza (fig. 7, f).

d) *Sfera* este corpul geometric format din totalitatea punctelor din spațiu egal depărtate de un punct fix numit centrul sferei.

Distanța de la centrul sferei la un punct al sferei se numește rază. O dreaptă are cel mult două puncte comune cu sfera: dacă are două puncte distincte comune, dreapta este secantă la sferă, dacă are două puncte confundate comune, dreapta e tangentă la sferă, dacă nu are nici un punct comun, dreapta este exterioară sferei.

Un plan poate intersecta sfera și atunci o intersectează după un cerc. Dacă planul trece prin centrul sferei raza cercului este egală cu raza sferei. Planul poate să aibă comun cu sfera două puncte confundate (atunci el este tangent la sferă), poate să nu aibă nici un punct comun cu sfera (atunci este exterior sferei).

Două sfere pot fi secante, tangente (dacă au două puncte confundate comune), interioare sau exterioare (dacă nu au nici un punct comun).



## II Unghiuri

**Unghi plan.** Numim unghi plan figura formată de două semidrepte  $Oy$ ,  $Ox$  care au aceeași origine.

Punctul  $O$  este vârful unghiului, iar semidreptele  $Ox$ ,  $Oy$  laturile lui; citim unghiul  $O$  sau unghiul  $xOy$ .

Dacă cele două semidrepte sînt în prelungire, unghiul se numește *unghi cu laturile în prelungire*.

Numim *unghiuri adiacente* două unghiuri care au același vîrf, o latură comună, iar celelalte două laturi de o parte și de alta a laturii comune (fig. 8); dacă cele două laturi necomune sînt în prelungire unghiurile se numesc unghiuri adiacente suplimentare.

Numim *bisectoare* a unui unghi, semidreapta care are originea în vârful unghiului și formează cu laturile unghiului două unghiuri adiacente egale.

Fiind dat un unghi  $xOy$  putem duce prin  $O$  o semidreaptă și numai una singură care să formeze cu  $Ox$ ,  $Oy$  unghiuri adiacente egale. Observăm că dacă mai ducem prin  $O$  o semidreaptă care să formeze cu  $Ox$ ,  $Oy$  unghiuri adiacente; ea va forma cu bisectoarea un unghi oarecare deci unghiurile adiacente formate sînt neegale (fig. 9).

**Unghi drept. Drepte perpendiculare.** Bisectoarea unui unghi cu laturile în prelungire formează cu laturile unghiului două unghiuri adiacente suplimentare egale. Un unghi egal cu unghiul său adiacent suplimentar se numește unghi drept. Semidreptele care formează un unghi drept se numesc perpendiculare. Dacă prelungim cele două semidrepte obținem două drepte care se numesc și ele perpendiculare.

Perpendiculara pe mijlocul unui segment se numește *mediatoarea* segmentului.

Într-un plan, perpendiculara într-un punct al unei drepte pe dreaptă, fiind bisectoarea unui unghi (cu laturile în prelungire), există totdeauna și este unică. Același lucru se poate spune despre perpendiculara dintr-un punct exterior (fig. 10, a). O semidreaptă care unește un punct exterior al dreptei (planului) cu un punct al dreptei (planului) și nu este perpendiculară pe dreaptă (plan) se numește oblică față de dreaptă (plan).

În spațiu, într-un punct al unei drepte se pot duce cîte perpendiculare vrem.

În adevăr prin dreapta dată trec cîte plane vrem, în fiecare plan se poate duce o perpendiculară pe dreaptă într-un punct al ei (fig. 10, b).

Toate aceste drepte sînt situate într-un plan iar dreapta dată este perpendiculară pe acest plan.

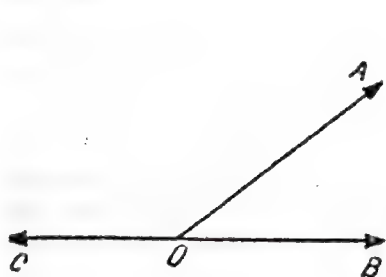


Fig. 8

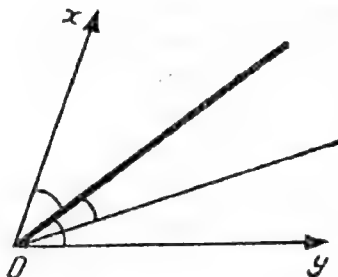


Fig. 9



Numim *dreaptă perpendiculară pe plan*, dreapta perpendiculară pe toate dreptele din plan.

Dintr-un punct al planului sau exterior planului se poate duce o singură perpendiculară pe plan și câte oblice vrem.

Punctul de intersecție a perpendicularei pe o dreaptă sau pe un plan cu dreapta sau planul se numește *piciorul perpendicularei* sau *proiecția punctului pe dreaptă sau pe plan* (fig. 11, a).

Proiecția unui segment pe o dreaptă sau pe un plan este segmentul determinat de proiecțiile originii și extremității segmentului (fig. 11, b). Proiecția unei drepte este dreapta determinată

de proiecțiile a două puncte ale dreptei: dacă dreapta intersectează dreapta (planul) pe care se face proiecția atunci proiecția ei trece prin punctul de intersecție deci este suficient să mai proiectăm un singur punct al dreptei (fig. 11, c).

*Unghiul a două drepte în spațiu.* Unghiul a două drepte, nesituate în același plan, este unghiul plan format de paralelele duse la cele două drepte printr-un punct oarecare al spațiului (fig. 12, a, b).

*Unghiul unei drepte cu un plan* este unghiul plan format de dreaptă cu proiecția ei pe plan (fig. 11, c).

*Unghi diedru.* Figura formată de două semiplane mărginite de aceeași dreaptă se numește unghi diedru; dreapta comună se numește *muchia diedrului*; cele două semiplane se numesc *fețele diedrului* (fig. 13).

Numim unghi plan, corespunzător unui diedru dat, unghiul format ducând într-un punct al muchiei diedrului perpendicularele pe muchie în cele două semiplane (fig. 13).

Fie  $P$  și  $Q$  cele două semiplane și  $AB$  muchia lor comună. În punctul  $M \in AB$  ducem în  $P$  dreapta  $p \perp AB$  și în  $Q$  dreapta  $q \perp AB$ . Unghiul format de semidreptele  $p$  și  $q$  este un unghi plan și anume unghiul plan corespunzător diedrului. El este cel mai mic unghi plan, cu vârful un punct al muchiei, format de o dreaptă din  $P$  cu o dreaptă din  $Q$ .

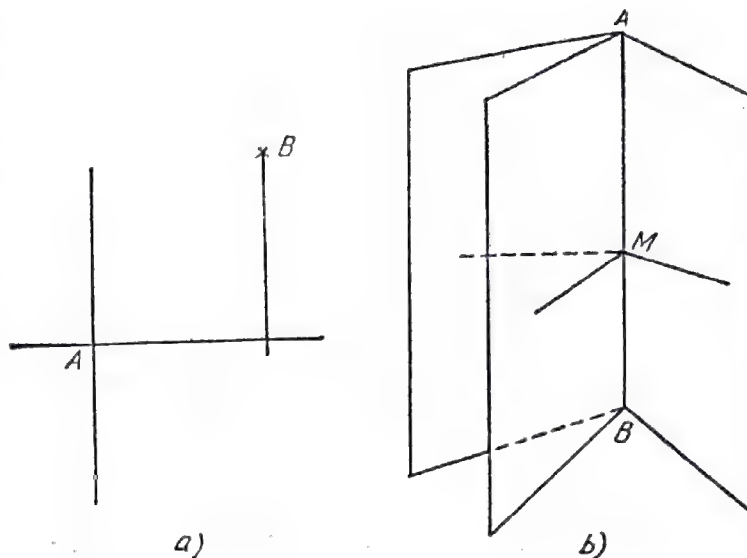


Fig. 10

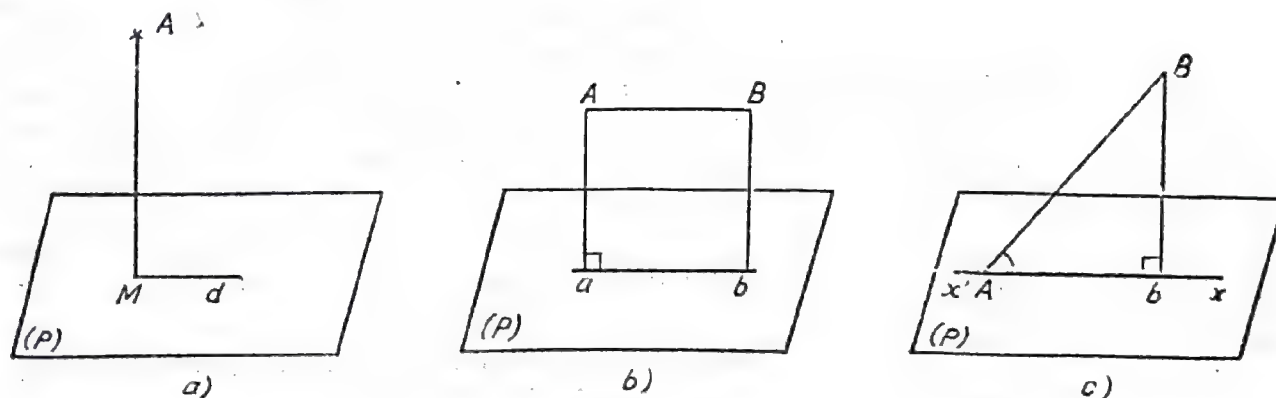


Fig. 11

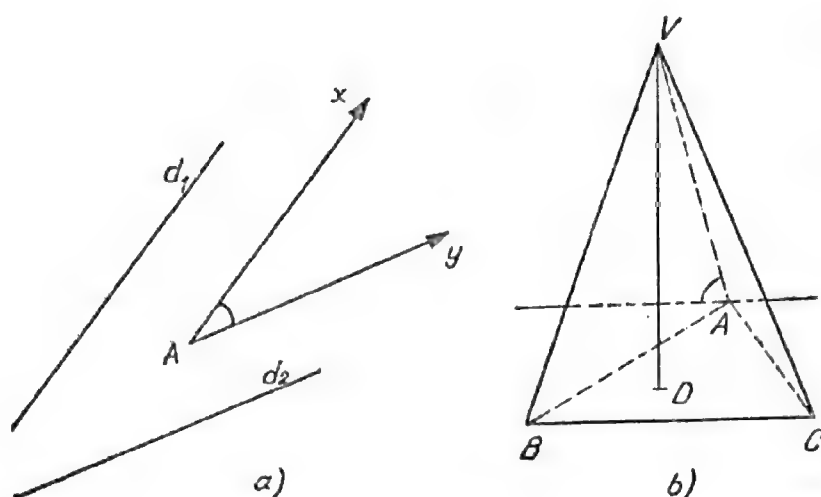


Fig. 12

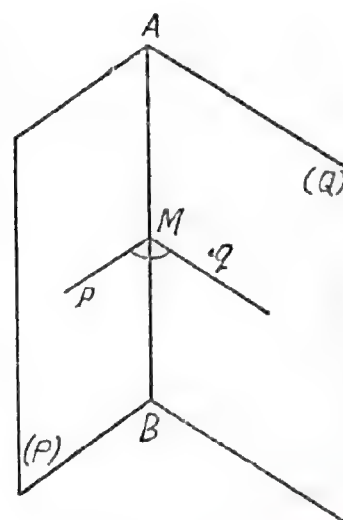


Fig. 13

Dacă unghiul plan corespunzător diedrului este drept, diedrul se numește drept și semiplanele care-l formează sînt perpendiculare unul pe celălalt.

*Exemple.*

1) În piramida  $VABC$  (fig. 12, b) unghiul dintre muchia  $VA$  și latura  $BC$  este unghiul format de  $VA$  cu paralela la  $BC$  dusă prin  $A$ .

2) În paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A'B'C'D'$  (fig. 14), unghiul diedru format de planul bazei  $ABCD$  și planul feței laterale  $ABA'B'$  este unghiul  $\widehat{CBB'}$  sau  $\widehat{DAA'}$ . Cele două unghiuri plane sînt egale, ele sînt în acest caz unghiuri drepte.

3) Unghiul format de o diagonală a unui paralelipiped dreptunghic cu planul bazei este unghiul format de această diagonală cu diagonala bazei care pornește din același virf.

Fie paralelipipedul dreptunghic din figura 14. Diagonala  $AC'$  se proiectează pe planul  $ABCD$  după  $AC$  (diagonala bazei) deci unghiul dreptei  $AC'$  cu planul  $ABCD$  este unghiul  $CAC'$ .

## Operații cu segmente și cu unghiuri

*Compararea a două segmente (unghiuri).* Pentru a compara două segmente (unghiuri) le suprapunem; dacă coincid atunci ele sînt egale. Dacă nu coincid atunci sînt neegale, unul este mai mare ( $>$ ) sau mai mic ( $<$ ) decît celălalt.

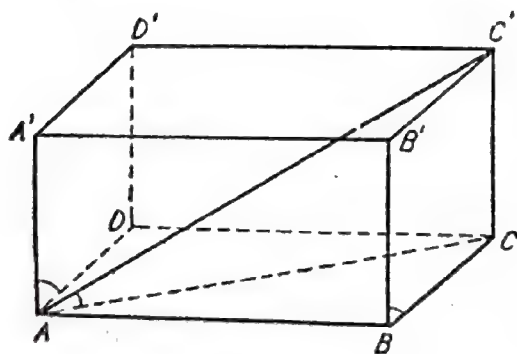


Fig. 14

Fie segmentele  $AB$  și  $CD$  (fig. 15, a). Pentru a le suprapune facem ca punctul  $C$  să coincidă cu punctul  $A$  și  $CD$  să ia direcția segmentului  $AB$ . Dacă  $D$  coincide cu  $B$ , segmentele sînt egale și scriem  $AB = CD$ ; dacă  $D$  coincide cu un punct  $D'$  cuprins între  $A$  și  $B$  atunci  $CD < AB$  (fig. 15, b). Segmentul  $D'B$  este diferența celor două segmente:  $AB - CD = D'B$ . Dacă  $D$  coincide cu un punct  $D_1$  așezat pe prelungirea segmentului  $AB$  dincolo de  $B$  ( $B$  între  $A$  și  $D_1$ ), atunci  $CD > AB$  (fig. 15, c).

Fiind date unghiurile  $xOy$  și  $x'O'y'$ , facem ca  $O'$  să coincidă cu  $O$ , semidreapta  $O'x'$  să ia direcția semidreptei  $Ox$  și  $O'y'$  să fie de aceeași parte a lui  $Ox$  ca și  $Oy$ . Dacă  $O'y'$  ia direcția semidreptei  $Oy$ , unghiurile sînt egale (fig. 15, a). Dacă  $O'y'$  coincide cu o semidreaptă  $Oy''$  cuprinsă în interiorul unghiului  $xOy$ ,

atunci  $\widehat{x'O'y'} < \widehat{xOy}$  (fig. 15, b); unghiul  $y''Oy$  este diferența celor două unghiuri, dacă  $O'y'$  coincide cu o semidreaptă  $Oy''$  dinafara unghiului  $xOy$ , atunci  $\widehat{x'O'y'} > \widehat{xOy}$  (fig. 15, c).

**Adunarea a două segmente sau unghiuri.** Pentru a aduna două segmente de dreaptă  $AB$  și  $CD$  așezăm pe o semidreaptă  $Ox$  cele două segmente cap la cap astfel ca  $A$  să coincidă cu  $O$  și originea  $C$  a celui de-al doilea segment să coincidă cu extremitatea  $B$  a primului. Segmentul  $OD'$  este segmentul sumă a celor două segmente (fig. 16). Pentru a aduna două unghiuri  $xOy$ ,  $x'O'y'$  facem să coincidă vârful  $O'$  cu  $O$ , semidreapta  $O'y'$  să ia direcția semidreptei  $Oy$  pentru a obține două unghiuri adiacente cu  $Oy$  latură comună. Unghiul  $xOy''$  este un unghi egal cu suma celor două unghiuri. Scriem  $\widehat{xOy} + \widehat{x'O'y'} = \widehat{xOy''}$  (fig. 17).

Adunarea segmentelor și adunarea unghiurilor sînt comutative și asociative ca și adunarea numerelor.

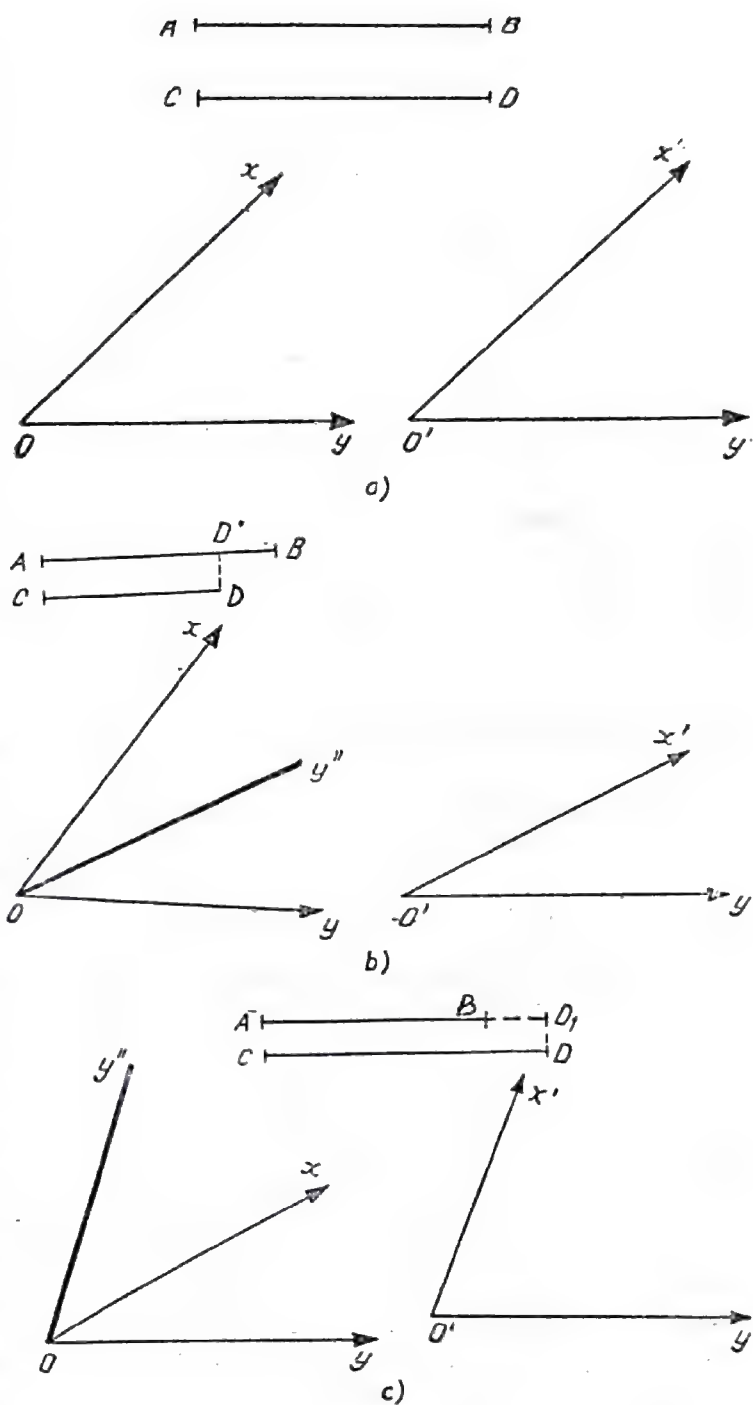


Fig. 15

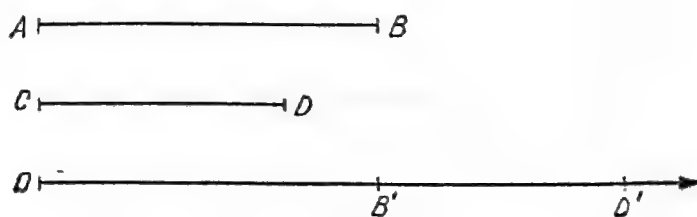


Fig. 16



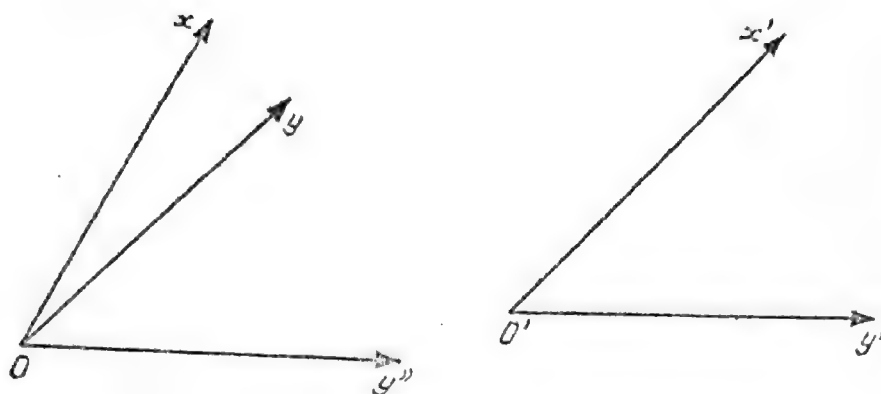


Fig. 17

Înmulțirea unui segment (unghi) cu un număr natural  $n$  se face formînd suma a  $n$  segmente (unghiuri) egale cu segmentul (unghiul) dat.

Înmulțirea cu un număr natural este distributivă față de adunarea sau scăderea a două segmente (unghiuri).

### Măsura segmentelor și a unghiurilor

A măsura un segment (unghi) înseamnă a găsi un număr care exprimă de cîte ori se cuprinde unitatea de măsură aleasă în segmentul (unghiul) dat sau a cîta parte din unitatea de măsură este segmentul (unghiul) dat. În primul caz măsura este un număr natural, în al doilea caz este un număr fracționar  $\frac{m}{n}$  și arată că a  $n$ -a parte din unitatea de măsură se cuprinde în segment (unghi) de  $m$  ori. În ambele cazuri segmentul (unghiul) se numește comensurabil cu unitatea de măsură.

Segmentele (unghiurile) se numesc incommensurabile cu unitatea de măsură cînd nu există nici o fracție din unitatea de măsură care să se cuprindă de un număr exact de ori în segmentul (unghiul) dat; atunci măsura segmentului (unghiului) se exprimă cu aproximație. Unitatea pentru măsurarea segmentelor este metrul cu multiplii și submultiplii lui. Raportul a două segmente este raportul măsurilor lor. Numim segmente proporționale segmentele cu ale căror măsuri se poate forma o proporție.

Măsura segmentului de dreaptă cuprins între două puncte se numește, distanța dintre cele două puncte sau lungimea segmentului  $AB$ .

Distanța de la un punct exterior la o dreaptă (plan) este măsura segmentului limitat de punctul exterior și piciorul perpendicularei dusă din acest punct pe dreaptă (plan) (fig. 18). Vom arăta că este cel mai mic segment care unește punctul exterior cu un punct oarecare al dreptei (planului).

În adevăr, fie dreapta  $d$ , punctul exterior  $M$  și  $MA$  perpendiculara din  $M$  pe  $d$ . Ducem o oblică oarecare  $MB$  față de  $d$ . Prelungim segmentul  $MA$  pornind din  $A$  cu segmentul  $AM' = MA$ . Unim  $M$  și  $M'$  cu  $B$  (fig. 19).

Dacă îndoim figura în lungul dreptei  $d$ , punctul  $M'$  coincide cu  $M$  ( $MA = M'A$  și  $\widehat{BAM} = \widehat{BAM'} = 1$  dr) iar  $BM$  coincide cu  $BM'$  căci două puncte determină același segment.

Dar  $MM' < MB + BM'$  (segmentul  $MM'$  drumul cel mai scurt între  $M$  și  $M'$ ) sau  $2MA < 2MB$ , de unde  $MA < MB$ .



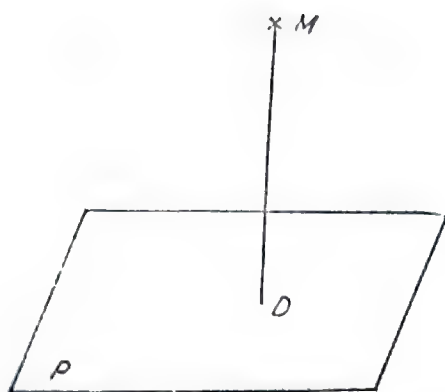
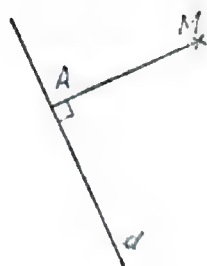


Fig. 18

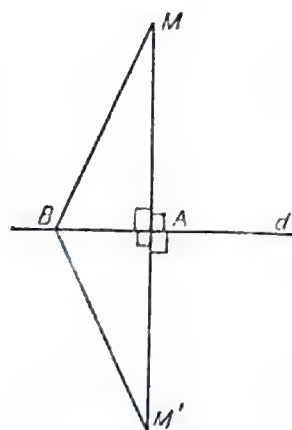


Fig. 19

În mod analog se demonstrează cînd dreapta  $d$  se înlocuiește cu planul  $P$ .

Distanța dintre două drepte paralele sau dintre două plane paralele este măsura segmentului care aparține perpendicularei pe cele două drepte (plane), limitat de cele două drepte (plane).

**Unitatea de măsură pentru unghiuri.** Ca unitate de măsură pentru unghiuri poate fi luat unghiul drept. Măsura unui unghi mai mic sau mai mare decît un unghi drept se va exprima printr-o fracție dintr-un unghi drept  $\frac{m}{n}$  dr;  $m$  exprimînd de cîte ori se cuprinde a  $n$ -a parte din unghiul drept în unghiul dat. Dacă un unghi este obtuz (mai mare decît un unghi drept), fracția  $\frac{m}{n}$  este supraunitară.

### Exemple

1) Să se calculeze suplementul unghiului  $\widehat{AOB} = \frac{3}{2}$  dr și să se figureze grafic.

Suma a două unghiuri suplementare este 2 dr deci

$$\widehat{BOC} = 2 \text{ dr} - \frac{3}{2} \text{ dr} = \frac{1}{2} \text{ dr}.$$

Pentru a desena unghiul  $BOC$ , prelungim latura  $AO$  dincolo de punctul  $O$  (fig. 20).

2) Să se calculeze și să se figureze complementul unghiului  $\widehat{AOB} = \frac{2}{3}$  dr.

Complementul  $\widehat{BOC} = 1 \text{ dr} - \frac{2}{3} \text{ dr} = \frac{1}{3} \text{ dr}.$

Pentru a desena unghiul  $BOC$ , ducem în  $O$  perpendiculara pe  $OA$ .

3) Să se calculeze două unghiuri complementare (suplementare) știind că unul este mai mare decît celălalt cu  $\frac{2}{3}$  dr.

Dacă unghiurile sînt complementare unghiul cel mare este

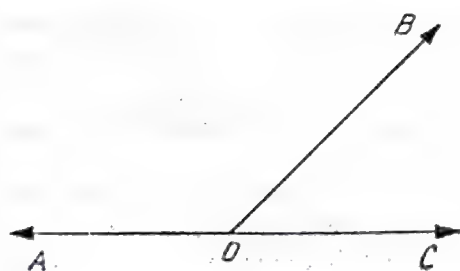


Fig. 20

$$\frac{1 \text{ dr} + \frac{2}{3} \text{ dr}}{2} = \frac{5}{6} \text{ dr}.$$

$$\text{Unghiul cel mic } \frac{1 \text{ dr} - \frac{2}{3} \text{ dr}}{2} = \frac{1}{6} \text{ dr sau } 1 \text{ dr} - \frac{5}{6} \text{ dr} = \frac{1}{6} \text{ dr.}$$

Dacă unghiurile sînt suplementare unghiul cel mare va fi

$$\frac{2 \text{ dr} + \frac{2}{3} \text{ dr}}{2} = \frac{8}{6} \text{ dr} = \frac{4}{3} \text{ dr.}$$

$$\text{Unghiul cel mic } \frac{2 \text{ dr} - \frac{2}{3} \text{ dr}}{2} = \frac{4}{6} \text{ dr} = \frac{2}{3} \text{ dr sau } 2 \text{ dr} - \frac{4}{3} \text{ dr} = \frac{2}{3} \text{ dr.}$$

4) Să se calculeze două unghiuri complementare (suplementare) știind că unul este:

a) de 3 ori mai mare decît celălalt, b)  $\frac{3}{7}$  din celălalt.

a) Dacă unghiurile sînt complementare, unghiul cel mic este

$$1 \text{ dr} : 4 = \frac{1}{4} \text{ dr.}$$

$$\text{Unghiul cel mare } \frac{1}{4} \text{ dr} \cdot 3 = \frac{3}{4} \text{ dr sau } 1 \text{ dr} - \frac{1}{4} \text{ dr} = \frac{3}{4} \text{ dr.}$$

Dacă unghiurile sînt suplementare, unghiul cel mic este

$$2 \text{ dr} : 4 = \frac{1}{2} \text{ dr.}$$

$$\text{Unghiul cel mare: } \frac{1}{2} \text{ dr} \cdot 3 = \frac{3}{2} \text{ dr sau } 2 \text{ dr} - \frac{1}{2} \text{ dr} = 1 \frac{1}{2} \text{ dr.}$$

b) Unghiurile complementare: unghiul mai mic  $(1 \text{ dr} : 10) \cdot 3 = \frac{3}{10} \text{ dr}$ ; unghiul mai mare  $(1 \text{ dr} : 10) \cdot 7 = \frac{7}{10} \text{ dr.}$

Unghiurile suplementare: unghiul cel mic  $(2 \text{ dr} : 10) \cdot 3 = \frac{3}{5} \text{ dr}$ ; unghiul cel mare  $(2 \text{ dr} : 10) \cdot 7 = \frac{7}{5} \text{ dr.}$

Unghiul drept (fiind prea mare) nu este o unitate convenabilă de măsură, se folosesc mai des ca unități de măsură unghiuri mai mici care depind de arcele de cerc corespunzătoare.

Într-un cerc  $O$  luăm un arc  $AB$  razele  $OA$ ,  $OB$  formează un unghi cu vîrful în  $O$  care se numește unghi la centru corespunzător arcului  $AB$ .

Într-un cerc sau în două cercuri egale (care au aceeași rază) la două unghiuri la centru egale corespund arce egale și reciproc la arce egale corespund unghiuri la centru egale.

Această propoziție se demonstrează suprapunînd cele două unghiuri (arce) care fiind egale, coincid. Rezultă că arcele (unghiurile) corespunzătoare coincid deci sînt egale.

În același cerc sumei a două unghiuri la centru egale îi corespunde un arc egal cu suma celor două arce și reciproc. Demonstrația se face tot prin suprapunere.

Considerăm un unghi la centru drept, unghiul  $AOB$  ( $OA \perp OB$ ), căruia îi corespunde arcul  $\widehat{AB}$ , a 90-a parte din arcul  $\widehat{AB}$ ; se numește arc de un grad și se notează  $1^\circ$ .

Arcul de  $1^\circ$  se ia ca unitate de măsură pentru arce, iar unghiul la centru corespunzător unghiului de  $1^\circ$  se ia ca unitate de măsură pentru unghiuri. Această unitate de măsură are ca submultipli: minutul a 60-a parte dintr-un grad (se notează  $1'$ ) și secunda a 60-a parte dintr-un minut sau a 3600-a parte dintr-un grad (se notează  $1''$ ). Acești submultipli se numesc sexagezimali.

*Observări.* 1) Se mai folosesc și alte unități de măsură: gradul centesimal  $\frac{1 \text{ dr}}{100}$  și submultiplii: minutul, a 100-a parte dintr-un grad, și secunda, a 100-a parte dintr-un minut.

2) Spunem că arcul  $AB$  are aceeași măsură cu unghiul  $AOB$  și scriem  $\widehat{AB} = \widehat{AOB}$ . Nu putem spune că unghiul  $AOB$  este egal cu arcul  $AB$  căci ele nu pot fi egale nefiind mărimi de același fel.

Măsura unghiului diedru este măsura unghiului plan corespunzător diedrului.

### Aplicații.

1) Să se calculeze:

- a)  $17^\circ 11' 37'' + 23^\circ 45' 29''$ ; b)  $37^\circ 5'' - 22^\circ 14' 13''$ ; c)  $37^\circ 15' 25'' \cdot 3$ ; d)  $37^\circ 15' 24'' : 3$ ; e)  $25^\circ 18' 36'' : \frac{3}{4}$ ; f)  $5^\circ 14' 35'' : 25$ .

La operațiile cu numere care exprimă unități de măsură pentru arce sau unghiuri procedăm ca la operațiile cu numere zecimale ținând însă seama că lucrăm în sistemul sexagesimal ( $1^\circ = 60'$ ;  $1' = 60''$ ).

$$\begin{array}{r} \text{a) } 17^\circ 11' 37'' + \\ 23^\circ 45' 13'' \\ \hline 40^\circ 56' 6'' \end{array} \quad 17^\circ 11' 37'' + 23^\circ 45' 29'' = 40^\circ 57' 6''.$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } 36^\circ 59' 65'' - \\ 22^\circ 14' 13'' \\ \hline 14^\circ 45' 52'' \end{array} \quad 37^\circ 5'' - 22^\circ 14' 13'' = 14^\circ 45' 52''.$$

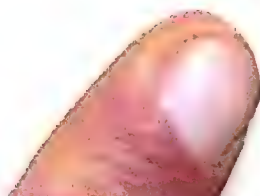
$$\text{c) } 37^\circ 15' 25'' \cdot 3 = 111^\circ 45' 75'' = 111^\circ 46' 15''.$$

$$\begin{array}{r} \text{d) } 37^\circ 15' 24'' \\ 60' + 15' = 75' \quad \begin{array}{l} | 3 \\ 12^\circ 25' 8'' \\ \hline 24'' \end{array} \quad 37^\circ 15' 24'' : 3 = 12^\circ 25' 8''. \\ \hline \end{array}$$

$$\text{e) } 25^\circ 18' 36'' : \frac{3}{4} = (25^\circ 18' 36'' : 4) \cdot 3 \text{ sau}$$

$$25^\circ 18' 36'' : \frac{3}{4} = (25^\circ 18' 36'' \cdot 3) : 4$$

$$\begin{array}{r} 25^\circ 18' 36'' \\ 75' \\ \hline 156'' \end{array} \begin{array}{l} | 4 \\ 6^\circ 19' 39'' \\ \hline \end{array}; \quad 6^\circ 19' 39'' \cdot 3 = 18^\circ 57' 117'' = 18^\circ 58' 57''.$$



sau

$$25^{\circ}18'36'' \cdot 3 = 75^{\circ}54'108'' = 75^{\circ}55'48''$$

$$\begin{array}{r|l} 75^{\circ}55'48'' & 4 \\ \hline 180' + 55' = 235' & 18^{\circ}58'57'' \\ 180'' + 48'' = 228'' & \end{array} \quad 25^{\circ}18'36'' : \frac{3}{4} = 18^{\circ}58'57''$$

f)  $5^{\circ}14'35'' : 35$ .

Pentru a efectua împărțirea, transformăm gradele în minute sau exprimăm numărul în secunde și apoi calculăm numărul minutelor de la cit.

$$\begin{array}{r|l} 314'35'' & 35 \\ \hline 34' \cdot 60 + 35' = 2075' & 8'59'' \\ 325' & \\ \hline 10' & \end{array} \quad 5^{\circ}14'35'' : 35 = 8' \left( 59 \frac{2}{7} \right)''$$

sau:  $(314 \cdot 60'' + 35'') : 35 = 18875'' : 35 = 8' \left( 59 \frac{10}{35} \right)'' = 8' \left( 59 \frac{2}{7} \right)''$ .

2) Să se exprime

a)  $\frac{2}{3}$  dr;  $\frac{3}{7}$  dr;  $1\frac{2}{5}$  dr în grade, minute, secunde;

b)  $123^{\circ}14'$ ;  $2^{\circ}15'16''$  în unghiuri drepte.

a)  $\frac{2}{3}$  dr =  $\frac{2}{3} \cdot 90^{\circ} = 60^{\circ}$ ;  $\frac{3}{7}$  dr =  $\frac{3}{7} \cdot 90^{\circ} = \frac{270^{\circ}}{7} = 38^{\circ} \left( 34 \frac{2}{7} \right)''$

$$1\frac{2}{5} \text{ dr} = \frac{7}{5} \cdot 90^{\circ} = 126^{\circ}.$$

Pentru a transforma un unghi exprimat printr-un număr  $n$  de unghiuri drepte în grade minute și secunde înmulțim  $90^{\circ}$  cu numărul  $n$ .

b)  $123^{\circ}14' = \frac{\left( 123 \frac{14}{60} \right)^{\circ}}{90^{\circ}} \text{ dr} = \frac{123 \frac{7}{30}}{90} \text{ dr} = \frac{3697}{30 \cdot 90} \text{ dr} = 1 \frac{997}{2700} \text{ dr}.$

Pentru simplificarea calculelor când unghiul dat este mai mare decât un unghi drept se poate scoate întâi numărul întreg de unghiuri drepte apoi se calculează și fracția rămasă:

$123^{\circ}14' = 90^{\circ} + 33^{\circ}14'$  deci

$$123^{\circ}14' = 1 \text{ dr} + \frac{33 \frac{7}{30}}{90} \text{ dr} = 1 \frac{997}{2700} \text{ dr}.$$



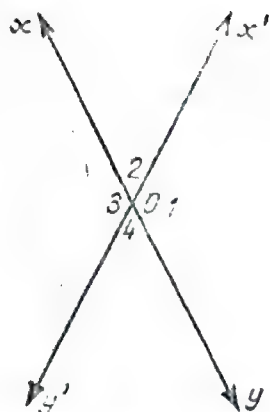


Fig. 21

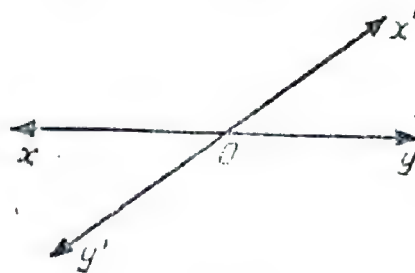


Fig. 22

Pentru a transforma un unghi dat în grade, minute și secunde în unghiuri drepte, exprimăm unghiul în grade și rezultatul îl împărțim la  $90^\circ$ .

$$2^\circ 15' 16'' = 2^\circ + \left(\frac{15}{60}\right)^\circ + \left(\frac{16}{3600}\right)^\circ = 2^\circ + \left(\frac{1}{4}\right)^\circ + \left(\frac{1}{225}\right)^\circ = \left(2\frac{229}{900}\right)^\circ$$

$$2^\circ 15' 16'' = \frac{\left(2\frac{229}{900}\right)^\circ}{90^\circ} \text{ dr} = \frac{2029}{81\,000} \text{ dr}.$$

**Unghiuri opuse la vîrf.** Numim unghiuri opuse la vîrf, două unghiuri care au același vîrf și laturile unuia sînt în prelungirea laturilor celuilalt (fig. 21).

**Teoremă.** Dacă două unghiuri sînt opuse la vîrf atunci ele sînt egale.

Fie dreptele  $x'y'$  și  $xy$  care se intersectează în punctul  $O$ , se formează patru unghiuri notate cu  $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$  (fig. 21).

Perechile de unghiuri  $(\hat{1}; \hat{3}), (\hat{2}; \hat{4})$  sînt opuse la vîrf, iar perechile de unghiuri  $(\hat{1}, \hat{2}), (\hat{2}, \hat{3}), (\hat{3}, \hat{4}), (\hat{4}, \hat{1})$  sînt suplementare.

$$\text{Vom avea } \hat{1} + \hat{2} = 2 \text{ dr} \quad \text{și} \quad \hat{2} + \hat{3} = 2 \text{ dr}, \quad \text{deci } \hat{1} = \hat{3}.$$

**Aplicație.** Se dă dreapta  $xy$ . Printr-un punct  $O$  al ei se duc de o parte și de alta două semidrepte  $Ox', Oy'$  care să formeze cu  $xy$  unghiuri egale neadiacente. Să se demonstreze că semidreptele  $Ox', Oy'$  sînt în prelungire.

Pe figura 22 avem dreapta  $xy$ , punctul  $O$  și semidreptele  $Ox', Oy'$  astfel ca  $\widehat{xOy'} = \widehat{yOx'}$ . Vrem să demonstrăm că  $Ox'$  și  $Oy'$  sînt în prelungire sau că semidreptele  $Ox', Oy'$  formează un unghi egal cu 2 dr.

$$1) \widehat{xOy'} + \widehat{y'Oy} = 2 \text{ dr} \quad (Ox \text{ și } Oy \text{ în prelungire}),$$

$$2) \widehat{xOy'} = \widehat{yOx'}.$$

Din (1) și (2) rezultă  $\widehat{yOx'} + \widehat{y'Oy} = 2 \text{ dr}$  deci semidreptele  $Ox', Oy'$  sînt în prelungire.

**Observare.** Această aplicație o putem folosi pentru a demonstra că trei puncte sînt coliniare.

**Exemplu.** Se dau două unghiuri opuse la vîrf (unghiurile  $xOy$  și  $x'Oy'$ ) și bisectoarele lor respectiv  $Oz, Oz'$ . Pe  $Oz$  și  $Oz'$  luăm punctele  $A$  și  $B$ . Să se demonstreze că punctele  $A, O, B$ , sînt coliniare.

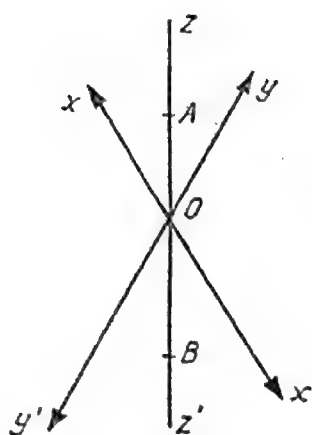


Fig. 23

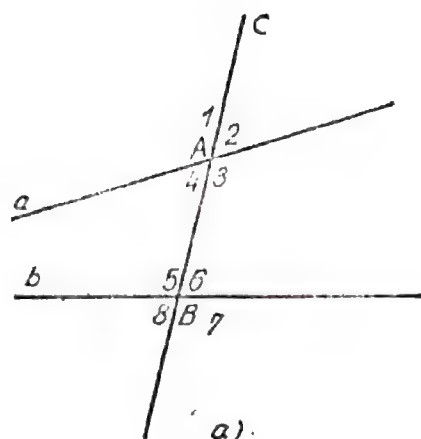
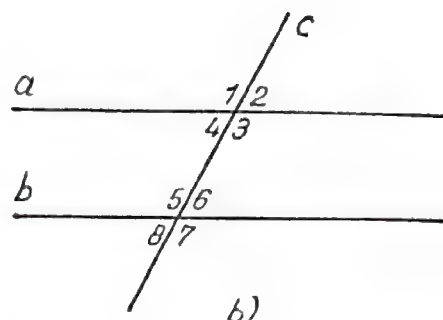


Fig. 24



- Pe figura 23 avem: 1)  $\widehat{xOA} = \widehat{AOy}$ ; 2)  $\widehat{x'OB} = \widehat{BOy'}$ ;  
 3)  $\widehat{xOy} = \widehat{x'Oy'}$  și  $\widehat{xOA} = \widehat{x'OB}$  (jumătăți de unghiuri egale).

Rezultă că  $OA$  și  $OB$  formează cu semidreptele  $Ox$ ,  $Ox'$  două unghiuri neadiacente egale. Deci  $OA$  și  $OB$  sînt în prelungire; punctele  $O, A, B$  sînt coliniare.

**Unghiuri formate de două drepte tăiate de o a treia (de o secantă).** Dacă într-un plan avem două drepte  $a$  și  $b$ , o dreaptă  $c$  care taie aceste drepte respectiv în  $A$  și  $B$  (fig. 24, a), formează cu fiecare cîte patru unghiuri. Unghiurile care se găsesc între cele două drepte  $a$  și  $b$  se numesc interne; cele dinafara celor două drepte, externe; două unghiuri așezate de o parte și de alta a secantei se numesc alterne; două unghiuri care au aceeași poziție față de cele două drepte și față de secantă se numesc corespondente. Vom avea perechile de unghiuri:

corespondente —  $(\widehat{1} \text{ și } \widehat{5})$ ,  $(\widehat{4} \text{ și } \widehat{8})$ ,  $(\widehat{2} \text{ și } \widehat{6})$ ,  $(\widehat{3} \text{ și } \widehat{7})$ ,

alterne interne —  $(\widehat{3} \text{ și } \widehat{5})$ ,  $(\widehat{4} \text{ și } \widehat{6})$ ,

alterne externe —  $(\widehat{1} \text{ și } \widehat{7})$ ,  $(\widehat{2} \text{ și } \widehat{8})$ ,

interne de aceeași parte a secantei —  $(\widehat{4} \text{ și } \widehat{5})$ ,  $(\widehat{3} \text{ și } \widehat{6})$ ,

externe de aceeași parte a secantei —  $(\widehat{1} \text{ și } \widehat{8})$ ;  $(\widehat{2} \text{ și } \widehat{7})$ .

**Teoremă.** Dacă două unghiuri alterne interne (alterne externe sau corespondente) sînt egale, atunci perechile de unghiuri alterne interne, corespondente, alterne externe sînt egale iar perechile de unghiuri interne sau externe de aceeași parte a secantei sînt suplementare.

Considerăm unghiurile alterne interne  $\widehat{3}$  și  $\widehat{5}$  egale. Pe figura 24, b din  $\widehat{3} = \widehat{5}$  și unghiurile suplementare formate, avem:

1)  $\widehat{1} = \widehat{7}$  ( $\widehat{3} = \widehat{5}$ ;  $\widehat{5} = \widehat{7}$  unghiuri opuse la vîrf),

2)  $\widehat{2} = \widehat{8}$  (suplemente de unghiuri egale  $\widehat{1} = \widehat{7}$ ),

3)  $\widehat{4} = \widehat{6}$  ( $\widehat{2} = \widehat{4}$ ;  $\widehat{8} = \widehat{6}$  opuse la vîrf),

4)  $\widehat{1} = \widehat{5}$  (avînd suplemente egale  $\widehat{4} = \widehat{6}$ ); analog  $\widehat{4} = \widehat{8}$ ;  $\widehat{2} = \widehat{6}$ ;  $\widehat{3} = \widehat{7}$ ,

5)  $\widehat{4} + \widehat{5} = 2 \text{ dr}$  ( $\widehat{4} + \widehat{3} = 2 \text{ dr}$  și  $\widehat{3} = \widehat{5}$ ); analog  $\widehat{3} + \widehat{6} = 2 \text{ dr}$ ,

6)  $\widehat{1} + \widehat{8} = 2 \text{ dr}$  ( $\widehat{1} + \widehat{4} = 2 \text{ dr}$  dar  $\widehat{4} = \widehat{8}$ ); analog  $\widehat{2} + \widehat{7} = 2 \text{ dr}$ .

În mod analog se demonstrează aceste relații pornind de la oricare din relațiile 1 — 6.

### III

## Demonstrarea teoremelor

Pentru a demonstra că „două drepte diferite au cel mult un punct comun” am raționat astfel: presupunem că există două drepte diferite care au două puncte comune, dar acest lucru nu e posibil căci prin două puncte trece o singură dreaptă. Am tras concluzia că propoziția dată este adevărată pentru că propoziția pe care am format-o noi prin negarea propoziției date este falsă.

Această metodă de raționament se numește *metoda reducerii la absurd*.

Pentru a demonstra o teoremă dată formăm o nouă propoziție prin care negăm teorema dată. Dacă ajungem la o relație care contrazice ipoteza teoremei date sau o propoziție stabilită anterior, deci la un rezultat absurd, atunci teorema dată este demonstrată.

Să aplicăm această metodă la demonstrarea teoremei: *Într-un plan se poate duce o singură perpendiculară pe o dreaptă într-un punct al ei*.

Negăm această propoziție. „Nu e adevărat că într-un plan se poate duce o singură perpendiculară pe o dreaptă a planului într-un punct al ei, sau: „există cel puțin un punct  $M$  pe o dreaptă  $d$  astfel încât, într-un plan care conține dreapta  $d$  să se ducă în  $M$  două perpendiculare pe  $d$ .”

Cele două perpendiculare ar fi bisectoare ale unghiului cu vârful în  $M$  și laturile în prelungire ceea ce este absurd căci un unghi are o singură bisectoare. Așadar în punctul  $M$  nu se pot duce două perpendiculare pe  $d$  în planul dat.

Unele teoreme pot fi demonstrate prin simetria unei figuri față de un punct sau față de o dreaptă din plan.

### Simetria în plan, față de un punct

Într-un plan, două puncte  $A$  și  $B$  sînt *simetrice față de un punct  $O$*  numit centru de simetrie dacă:

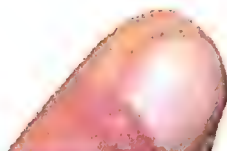
- 1) punctele  $A, O, B$  sînt coliniare și  $O$  situat între  $A$  și  $B$ .
- 2)  $OA = OB$  (fig. 25).

O figură are un *centru de simetrie*, dacă fiecare punct al ei are simetricul față de acest centru tot pe figură. De exemplu, centrul unui cerc este centrul de simetrie al cercului.

### Simetria în plan, față de o dreaptă

Într-un plan două puncte  $A$  și  $B$  sînt *simetrice față de o dreaptă  $d$*  a planului numit *axă de simetrie* dacă:

- 1)  $AB \perp d$ ,





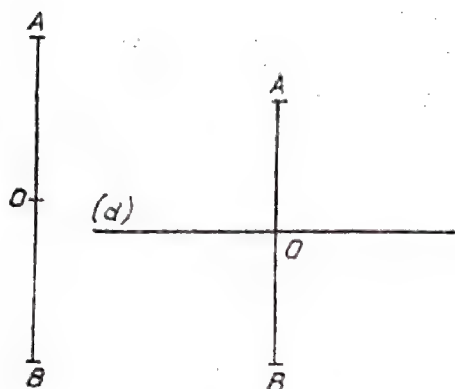


Fig. 25

Fig. 26

2) punctele  $A, B$  sînt simetrice față de intersecția dreptei  $AB$  cu  $d$  ( $AO = OB$ ),  $A$  și  $B$  fiind de o parte și de alta a dreptei  $d$  (fig. 26).

Dacă toate punctele unei figuri au simetricele față de aceeași dreaptă situate pe figură, atunci figura are o axă de simetrie. Din cele spuse reiese că, dacă îndoim figura în lungul axei de simetrie cele două părți ale figurii, prin suprapunere, coincid (fig. 27).

Exemple de figuri cu axe de simetrie.

1) Mediatoarea unui segment  $AB$  este axa de simetrie a segmentului.

Îndoind figura în lungul mediatoarei cele două segmente determinate pe  $AB$  de mijlocul lui coincid prin suprapunere.

2) Bisectoarea unui unghi este axa de simetrie a acestui unghi.

În adevăr, bisectoarea formînd cu laturile unghiului unghiuri adiacente egale, prin îndoirea figurii în lungul bisectoarei, cele două laturi ale unghiului prin suprapunere, coincid.

3) Într-un triunghi cu două laturi egale (triunghi isoscel), bisectoarea unghiului format de laturile egale este axa de simetrie a triunghiului, ea este deci și mediană, și înălțime și mediatoarea laturii opuse.

În adevăr, fie  $ABC$  un triunghi isoscel (fig. 28) și  $AD$  bisectoarea unghiului  $BAC$ .

Bisectoarea  $AD$  este axa de simetrie a unghiului  $BAC$  deci prin îndoirea figurii în lungul bisectoarei, semidreapta  $AC$  ia direcția semidreptei  $AB$ ; dar  $AB = AC$  deci punctul  $C$  coincide cu punctul  $B$ . Triunghiurile  $ABD$  și  $ACD$  prin suprapunere coincid, deci vom avea și:

$$1) DB = DC; \quad 2) \widehat{ADB} = \widehat{ADC}.$$

Unghiurile  $ADB$  și  $ADC$ , fiind unghiuri adiacente suplementare egale, sînt unghiuri drepte deci  $B$  este simetricul lui  $C$  față de  $AD$ . Deci  $DB = DC$  și  $AD \perp BC$ .

Din egalitatea triunghiurilor rezultă și  $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ . Într-un triunghi isoscel unghiurile de la bază sînt egale.

Unele figuri nu au axe de simetrie, de exemplu, un triunghi care nu are două laturi egale nu are axă de simetrie. Unele figuri au mai multe axe de simetrie. De exemplu triunghiul care are toate laturile egale (triunghiul echilateral) are trei axe

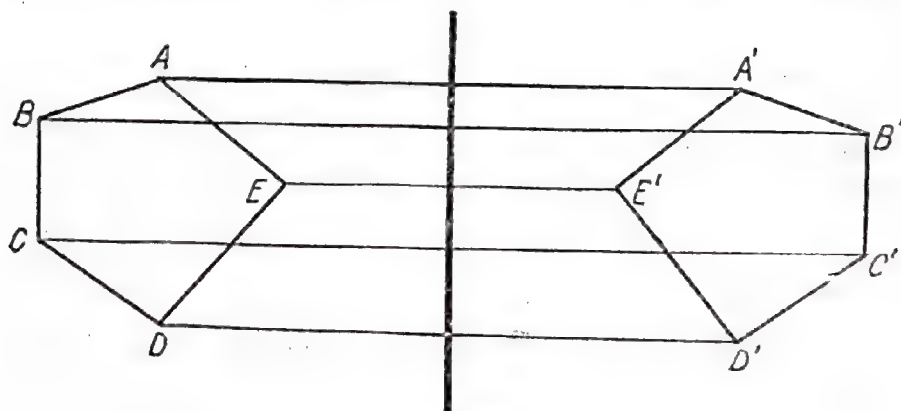


Fig. 27

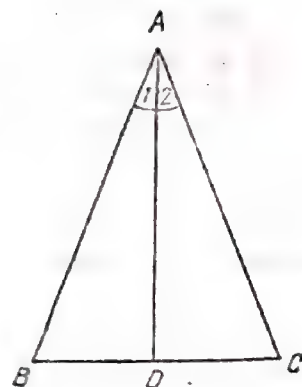


Fig. 28



de simetrie (fiind de trei ori isoscel). În acest caz unghiurile alăturate fiecărei laturi sînt egale deci cele trei unghiuri ale triunghiului echilateral sînt egale.

O altă metodă folosită des în demonstrarea unor teoreme în care ni se cere să dovedim că există două segmente sau două unghiuri egale este *metoda triunghiurilor egale*.

Această metodă se bazează pe teoremele (numite și cazurile de egalitate a triunghiurilor) care cuprind condiții suficiente ca două triunghiuri să fie egale.

*Cazul I. Dacă două triunghiuri au cîte o latură și unghiurile alăturate ei respectiv egale, atunci triunghiurile sînt egale.*

Fie triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$  în care prin ipoteză:

$$AB = A'B'; \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \text{ și } \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \text{ (fig. 29).}$$

Suprapunem triunghiul  $A'B'C'$  peste triunghiul  $ABC$  astfel ca  $A'$  să coincidă cu  $A$ ; segmentul  $A'B'$  să ia direcția segmentului  $AB$ , punctul  $C'$  să fie de aceeași parte a segmentului  $AB$  ca și punctul  $C$ . Pe baza ipotezei vom avea: punctul  $B'$  coincide cu  $B$  ( $AB = A'B'$ ), segmentele  $A'C'$  și  $B'C'$  iau respectiv direcțiile segmentelor  $AC$ ,  $BC$  ( $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$  și  $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ ). Cum două drepte diferite au un singur punct comun,  $C'$  coincide cu  $C$ . Prin suprapunere cele două triunghiuri au coincis. Rezultă că și celelalte elemente corespunzătoare sînt egale.

$$1) \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}; 2) AC = A'C'; CB = C'B' \text{ deci} \\ \Delta ABC = \Delta A'B'C'.$$

*Cazul II. Dacă două triunghiuri au două laturi și unghiul cuprins între ele respectiv egale, atunci ele sînt egale.*

Fie triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$  (fig. 30). Din ipoteză avem:

$$AB = A'B'; AC = A'C' \text{ și } \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}.$$

Suprapunem, ca în cazul precedent, segmentul  $A'B'$  peste segmentul  $AB$  astfel ca  $C'$  să fie de aceeași parte a lui  $AB$  ca și  $C$ ;  $A'C'$  coincide cu  $AC$  ( $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$

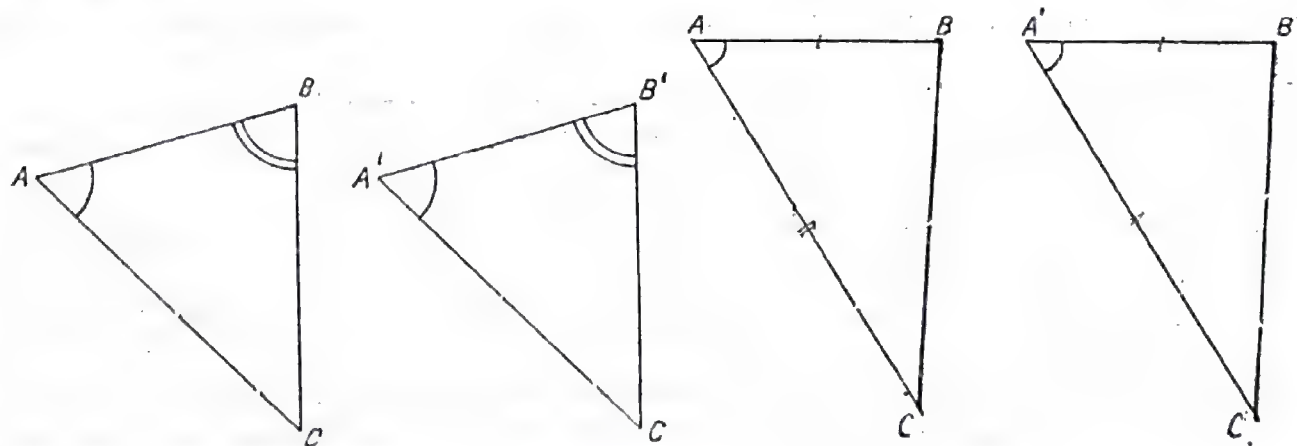


Fig. 29

Fig. 30

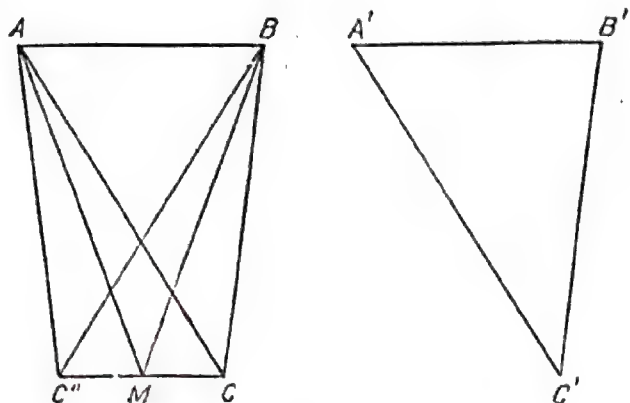


Fig. 31

și  $AC = A'C'$ ) deci  $C'$  coincide cu  $C$ . Cele două triunghiuri coincid prin suprapunere. Vom avea și:

- 1)  $BC = B'C'$ ; 2)  $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ ;
- 3)  $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$  deci  $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ .

*Cazul III. Dacă două triunghiuri au laturile respectiv egale, atunci ele sînt egale.*

Fie triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$ . Din ipoteză avem:

$$AB = A'B'; \quad AC = A'C'; \quad BC = B'C' \text{ (fig. 31).}$$

Suprapunem cele două triunghiuri astfel încît  $AB$  să coincidă cu  $A'B'$  ( $AB = A'B'$ ) și punctul  $C'$  să fie de aceeași parte a segmentului  $AB$  ca și  $C$ . Nu putem ști ce direcții vor lua segmentele  $A'C'$  și  $B'C'$  pentru că nu știm nimic despre unghiurile corespunzătoare din cele două triunghiuri. Folosim metoda reducerii la absurd. Nu e adevărat că cele două triunghiuri sînt egale, adică există două triunghiuri cu laturile respectiv egale care nu sînt egale. Atunci punctul  $C'$  va coincide cu un punct  $C''$  diferit de  $C$ . Pe figură se vede că, în acest caz, triunghiurile  $ACC''$  și  $BCC''$  avînd cîte două laturi egale, sînt isoscele. Fiecare dintre ele are cîte o axă de simetrie care este și mediatoare a segmentului  $CC''$ . Notînd cu  $M$  mijlocul segmentului  $CC''$  rezultă:  $MA \perp CC''$  și  $MB \perp CC''$ . Negînd teorema dată am ajuns la afirmația că într-un plan putem duce într-un punct al unei drepte două perpendiculare pe dreaptă ceea ce știm că e fals.

Punctul  $C''$  nu poate fi diferit de punctul  $C$ . Unghiurile corespunzătoare (care se opun laturilor respectiv egale) sînt egale două cîte două.

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C'.$$

În cazul triunghiurilor dreptunghice vom avea două cazuri de egalitate, consecințe ale cazurilor de egalitate a triunghiurilor oarecare și două cazuri care se demonstrează special.

*Cazul I. Două triunghiuri dreptunghice care au cîte o catetă și unghiul ascuțit alăturat catetei respectiv egale, sînt egale.*

(Se aplică cazul I de egalitate a triunghiurilor oarecare; unul din unghiuri este drept.)

*Cazul II. Două triunghiuri dreptunghice care au catetele respectiv egale, sînt egale.*

(Se aplică cazul II de egalitate a triunghiurilor oarecare, unghiurile cuprinse între cele două catete fiind unghiuri drepte, sînt egale.)

*Cazul III. Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuza și un unghi ascuțit respectiv egale sînt egale.*

Fie triunghiurile dreptunghice  $ABC$ ,  $A'B'C'$  ( $\widehat{A} = 1 \text{ dr}$ ;  $\widehat{A'} = 1 \text{ dr}$ ) (fig. 32) în care  $BC = B'C'$  și  $\widehat{B} = \widehat{B'}$ .

Suprapunem cele două triunghiuri astfel ca ipotenuza  $B'C'$  să coincidă cu  $BC$  ( $B'C' = BC$ ) și  $A'$  să fie de aceeași parte a ipotenuzei  $BC$  ca și punctul  $A$ ; cateta  $B'A'$  ia direcția catetei  $BA$  ( $\widehat{B} = \widehat{B'}$ ).  $A'C'$  este perpendiculară pe  $B'A'$  în  $A'$ .

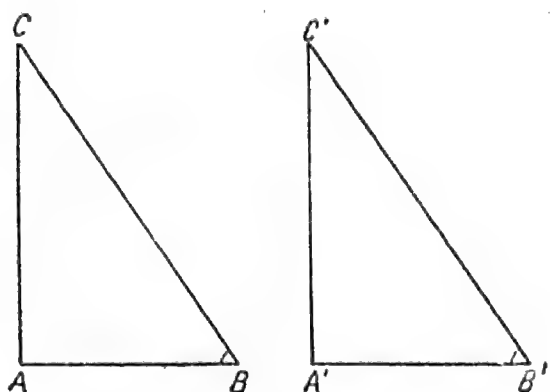


Fig. 32

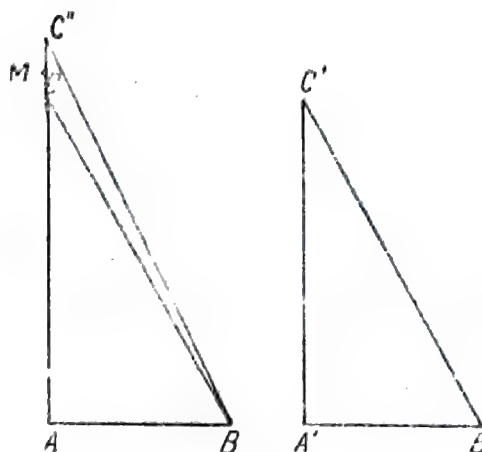


Fig. 33

Dar în planul triunghiului  $ABC$  din  $C$  nu se poate duce decât o perpendiculară pe  $AB$ ;  $A'C'$  coincide cu  $AC$ . Cele două triunghiuri coincid prin suprapunere deci  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ .

*Cazul IV. Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuza și câte o catetă respectiv egale, sînt egale.*

Fie  $ABC$  și  $A'B'C'$  cele două triunghiuri în care  $\hat{A} = 1 \text{ dr}$ ;  $\hat{A}' = 1 \text{ dr}$ ;  $BC = B'C'$  și  $AB = A'B'$  (fig. 33).

Suprapunem cele două triunghiuri astfel încît cateta  $A'B'$  să coincidă cu  $AB$ ,  $C'$  să fie de aceeași parte a segmentului  $AB$  ca și  $C$ ,  $A'C'$  ia direcția semidreptei  $AC$ .

Nu putem afirma nimic despre  $C'B'$  căci nu știm dacă  $\hat{C}' = \hat{C}$ . Folosim metoda reducerii la absurd. Există două triunghiuri în condițiile date pentru care  $C'B'$  nu ia direcția dreptei  $CB$  ci intersectează  $AC$  în  $C'' \neq C$ . S-a format triunghiul isoscel  $CBC''$  care are ca axă de simetrie, bisectoarea unghiului  $CBC''$  ( $BM$ ) care este și mediatoarea segmentului  $CC''$ . Ar urma că din  $B$  se pot duce în planul triunghiului două perpendiculare pe  $AC$  ( $BM \perp AC$ ;  $CA \perp AB$ ) ceea ce este absurd. Punctul  $C''$  trebuie să coincidă cu  $C$  și avem  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ .

Metoda triunghiurilor egale se aplică la demonstrarea egalității unor segmente sau a unor unghiuri. Se încadrează aceste segmente sau unghiuri în două triunghiuri a căror egalitate o putem stabili prin unul din cazurile de egalitate a triunghiurilor studiate.

### Aplicație

1) În triunghiul  $ABC$  se unește punctul  $B$  cu mijlocul  $M$  al laturii  $AC$  și se prelungeste dincolo de  $M$  cu un segment  $MD = BM$ . Să se demonstreze că  $AD = BC$ .

Fie triunghiul  $ABC$  (fig. 34), iar  $M$  mijlocul segmentului  $AC$ . Vrem să demonstrăm că  $AD = BC$ . Încadrăm aceste segmente în două triunghiuri  $MAD$  și  $MCB$ . Aceste două triunghiuri au ca elemente egale:

- 1)  $MB = MD$  (din ipoteză),
- 2)  $AM = MC$  (din ipoteză),
- 3)  $\widehat{BMC} = \widehat{AMD}$  (unghiuri opuse la vîrf).

Pe baza cazului II de egalitate a triunghiurilor rezultă

$$\triangle AMD = \triangle BMC.$$



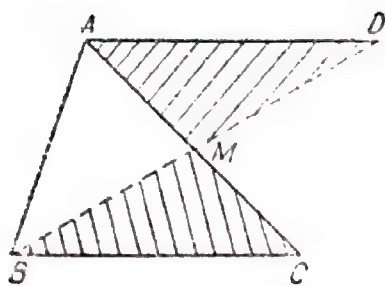


Fig. 34

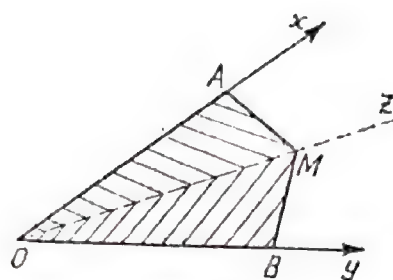


Fig. 35

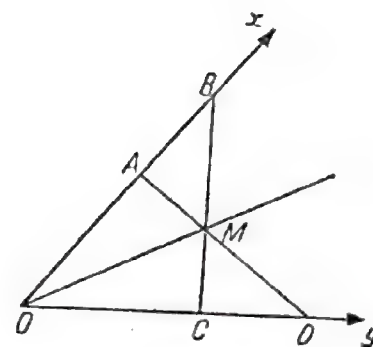


Fig. 36

În triunghiurile egale  $AMD$  și  $BMC$  la unghiuri egale ( $\widehat{BMC}$  și  $\widehat{AMD}$ ) se opun laturi egale:  $AD = BC$ .

2) Se dă un unghi  $xOy$  și bisectoarea  $Oz$  a unghiului. Pe  $Oz$  se ia un punct oarecare  $M$  și se duc perpendicularele  $MA$ ,  $MB$  respectiv pe  $Ox$ ,  $Oy$ . Să se demonstreze că  $MA = MB$ .

Fie unghiul  $xOy$ , bisectoarea  $Oz$  (fig. 35) și  $M \in Oz$ . Ducem  $MA \perp Ox$ ;  $MB \perp Oy$ . Încadrăm  $MA$  și  $MB$  în triunghiurile  $OMA$  și  $OMB$  care au elementele egale:

1)  $\widehat{A} = \widehat{B} = 1 \text{ dr}$ , 2)  $OM$  latură comună, 3)  $\widehat{AOM} = \widehat{MOB}$  ( $OM$  bisectoarea unghiului  $xOy$ ). Deci cele două triunghiuri sînt dreptunghice și au ipotenuza și un unghi ascuțit respectiv egale. Pe baza cazului III de egalitate a triunghiurilor dreptunghice:  $\triangle OBM = \triangle OAM$ .

În triunghiurile egale  $OBM$  și  $OAM$  la unghiuri egale ( $\widehat{AOM} = \widehat{MOB}$ ) se opun laturi egale:  $MA = MB$ .

3) Pe laturile unui unghi  $xOy$  se iau punctele  $A$  și  $B$  pe  $Ox$ ,  $C$  și  $D$  pe  $Oy$  astfel încît  $OA = OC$  și  $OB = OD$ . Să se demonstreze că punctul de intersecție a dreptelor  $AD$  și  $BC$  se găsește pe bisectoarea unghiului  $xOy$ .

Fie unghiul  $xOy$  (fig. 36) punctele  $A, B, C, D$  și  $M$  punctul de intersecție a dreptelor  $AD$  și  $BC$ .

Vrem să demonstrăm că  $\widehat{AOM} = \widehat{MOC}$ . Aceste unghiuri fac parte din triunghiurile  $OAM$  și  $OMC$ ; ele sînt egale dacă aceste triunghiuri sînt egale. Triunghiurile  $OAM$  și  $OMC$  au două laturi egale:  $OM$  latură comună și  $OA = OC$  din ipoteză, ele vor fi egale dacă și  $AM = MC$ . Pentru a demonstra că  $AM = MC$  putem considera triunghiurile  $MAB$  și  $MCD$  care au  $AB = CD$  (diferențe de segmente egale). Triunghiurile  $MAB$  și  $MCD$  sînt egale dacă  $\widehat{OBC} = \widehat{ADO}$  și  $\widehat{BAM} = \widehat{MCD}$ . Unghiurile  $ABM$  și  $MDC$  fac parte din triunghiurile  $OBC$  și  $OAD$  care au elemente egale:

- 1)  $OB = OD$  (din ipoteză), 2)  $OC = OA$  (din ipoteză), 3)  $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$  (comun).
- $\triangle OBC = \triangle OAD$  (cazul II) deci avem și: 3)  $\widehat{OBC} = \widehat{ADO}$  ( $OC = OA$ ),
- 4)  $\widehat{OCB} = \widehat{OAD}$  ( $OB = OD$ ).

Din 4) rezultă 4')  $\widehat{BCD} = \widehat{BAD}$  (au suplemente egale).



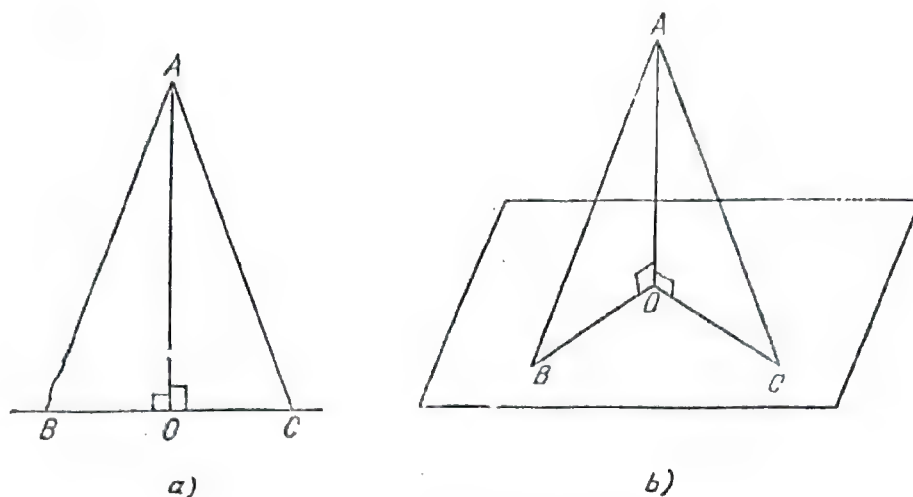


Fig. 37

Triunghiurile  $AMB$  și  $CMD$  sînt egale ( $AB = CD$  și relațiile 3 și 4) deci  $MA = MC$  (se opun la unghiuri respectiv egale).

Triunghiurile  $OAM$  și  $OMC$  sînt egale ( $OM = OM$ ;  $OA = OC$ ;  $MA = MC$ ) deci  $\widehat{AOM} = \widehat{MOC}$ . Punctul  $M$  este pe bisectoarea unghiului  $xOy$ .

4) Dacă dintr-un punct ducem perpendiculara pe o dreaptă (plan) și două oblice egale atunci oblicele au picioarele egal depărtate de piciorul perpendicularei și reciproc dacă două oblice, duse din același punct pe o dreaptă (plan) au picioarele egal depărtate de piciorul perpendicularei duse din același punct pe dreaptă (plan), atunci oblicele sînt egale.

a) Fie  $AO$  perpendiculara pe dreaptă (plan) și oblicele  $AB = AC$  (fig. 37).

Triunghiurile  $ACO$  și  $AOB$  sînt egale fiind triunghiuri dreptunghice și  $AB = AC$  (din ipoteză) și  $AO$  comună. Rezultă  $OC = OB$ .

b) Fie oblicele  $AC$ ,  $AB$ , perpendiculara  $AO$  (fig. 37) și  $OB = OC$ .  $\triangle AOC = \triangle AOB$  (triunghiuri dreptunghice și  $OB = OC$ ;  $AO$  comună).

Rezultă:  $AB = AC$ .

Uneori trebuie să demonstrăm că toate punctele unei figuri  $F$  se bucură de o anumită proprietate și că nici un punct care nu aparține figurii nu se bucură de această proprietate. Spunem că figura  $F$  este *locul geometric* al punctelor care se bucură de proprietatea dată. Pentru a demonstra că o figură este locul geometric cerut trebuie să demonstrăm ambele proprietăți, directă și contrara ei.

### Exemple

1) *Mediatoarea unui segment este locul geometric al punctelor egal depărtate de extremitățile segmentului.*

a) Punctele mediatoarei unui segment sînt egal depărtate de extremitățile lui. Fie  $AB$  segmentul dat,  $M \in AB$ ,  $MA = MB$  și  $d \perp AB$  în  $M$ . Considerăm un punct oarecare  $N \in d$  (fig. 38). Vrem să demonstrăm că  $NA = NB$ . Triunghiurile  $AMN$  și  $BMN$  sînt dreptunghice egale avînd catetele respectiv egale. Deci  $NA = NB$ .

b) Fie  $N'$  un punct care nu aparține mediatoarei, trebuie să demonstrăm că  $N'A \neq N'B$  (fig. 38). Ducem  $N'M' \perp AB$ . Dacă  $N'A = N'B$ , atunci  $\triangle AM'N' = \triangle N'M'B$  (avînd o catetă comună și ipotenuzele egale). Rezultă  $M'A = M'B$  ceea ce nu se poate decît dacă  $N' \in d$ .

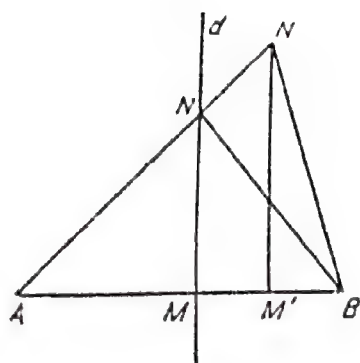


Fig. 38

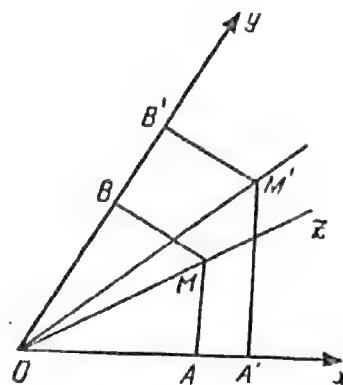


Fig. 39

2) *Bisectoarea unui unghi este locul geometric al punctelor egal depărtate de semidreptele care formează laturile unghiului.*

a) Punctele bisectoarei  $Oz$  a unghiului  $xOy$  sînt egal depărtate de laturile unghiului. Fie un punct  $M \in Oz$ . Ducem  $MA \perp Ox$ ,  $MB \perp Oy$  (fig. 39).  $\triangle OMA = \triangle MOB$  (avînd ipotenuza comună și un unghi ascuțit egal  $\widehat{AOz} = \widehat{zOy}$ ). Rezultă:

$$MA = MB.$$

b) Fie  $M'$  un punct interior unghiului  $xOy$  care nu aparține bisectoarei. Trebuie să demonstrăm că distanțele lui la laturile unghiului sînt neegale (fig. 39). Ducem  $M'A' \perp Ox$ ,  $M'B' \perp Oy$ . Triunghiurile  $OM'A'$  și  $OM'B'$  sînt egale dacă  $M'B' = M'A'$  căci au ipotenuza comună. Rezultă  $\widehat{A'OM'} = \widehat{M'OB'}$ . Deci  $OM'$  este bisectoarea unghiului ceea ce nu este posibil decît dacă  $M' \in Oz$ .

**Rotația.** O altă metodă folosită uneori în demonstrarea unei teoreme este rotația în jurul unui punct numit *centru de rotație* sau în jurul unei axe numită *axă de rotație*.

În plan, un punct  $A$  al unei figuri  $F$  se rotește în jurul unui punct  $O$  numit *centru de rotație*, de un unghi dat  $\alpha$ , dacă descrie un arc de cerc cu centrul în  $O$  și raza  $OA$  avînd măsura unghiului  $\alpha$ . Punctul  $B$  este obținut prin rotația punctului  $A$  cu centrul  $O$  și unghiul  $\alpha$  dacă  $OA = OB$  și  $\widehat{AOB} = \alpha$  (fig. 40, a).

**Observație.** Pentru a roti mai multe puncte ale unei figuri trebuie ca arcele de rotație să păstreze același sens.

De exemplu pe cercul  $O$  luăm punctele  $A, B, C, D$  astfel ca  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ . Rotind arcul  $AB$  în jurul lui  $O$  de unghiul  $AOC$ , punctul  $A$  coincide cu  $C$  iar  $B$  coincide cu  $D$  pentru că  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$  și prin suprapunere coincid (fig. 40, b).

Cu ajutorul rotației se pot demonstra unele din teoremele relative la arce și coarde în cerc. În exemplul precedent am demonstrat că într-un cerc (sau în două cercuri egale) la arce egale corespund coarde egale.

Un punct se rotește în jurul unei drepte de un unghi  $\alpha$  dacă descrie un arc de cerc care are ca măsură, măsura unghiului  $\alpha$  și centrul, punctul de intersecție a axei cu perpendiculara dusă din punct pe dreaptă. Dacă unghiul  $\alpha$  este egal cu  $180^\circ$  atunci punctul  $M$  și punctul  $M'$ , obținut prin rotirea de unghiul  $\alpha$  a punctului  $M$  în jurul unei drepte  $d$ , sînt simetrice față de axa de rotație. Dacă  $\alpha = 360^\circ$ , punctul  $M$  prin rotație se transformă în el însuși (fig. 41).

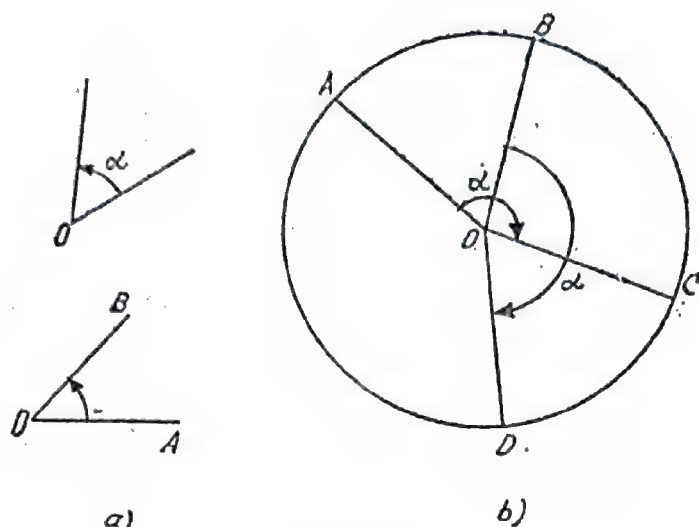


Fig. 40

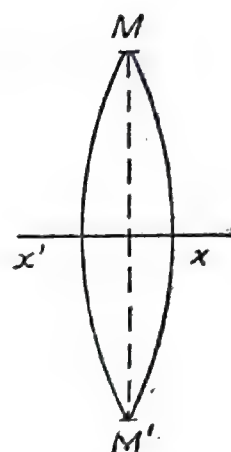


Fig. 41

### Aplicație.

1) Prin rotirea de  $360^\circ$  a unui segment de dreaptă în jurul unei drepte din planul său, care nu taie axa, se formează un cilindru, când segmentul este paralel cu axa de rotație, un con când segmentul are o extremitate pe axă, un trunchi de con când segmentul nu e paralel cu axa și nu o taie (fig. 42 a, b, c).

Prin rotație, extremitățile segmentului descriu câte un cerc cu centrul pe axă și raza perpendiculară din extremitatea segmentului pe axă. Segmentul generează suprafața laterală (fig. 42).

2) Prin rotirea de  $360^\circ$  a unui dreptunghi în jurul unei laturi a lui, a unui triunghi dreptunghic în jurul unei catete și a unui trapez dreptunghic în jurul laturii perpendiculare pe bază, se obțin corpurile de rotație: cilindrul circular drept, conul circular drept, trunchiul de con circular drept (fig. 42 a, b, c).

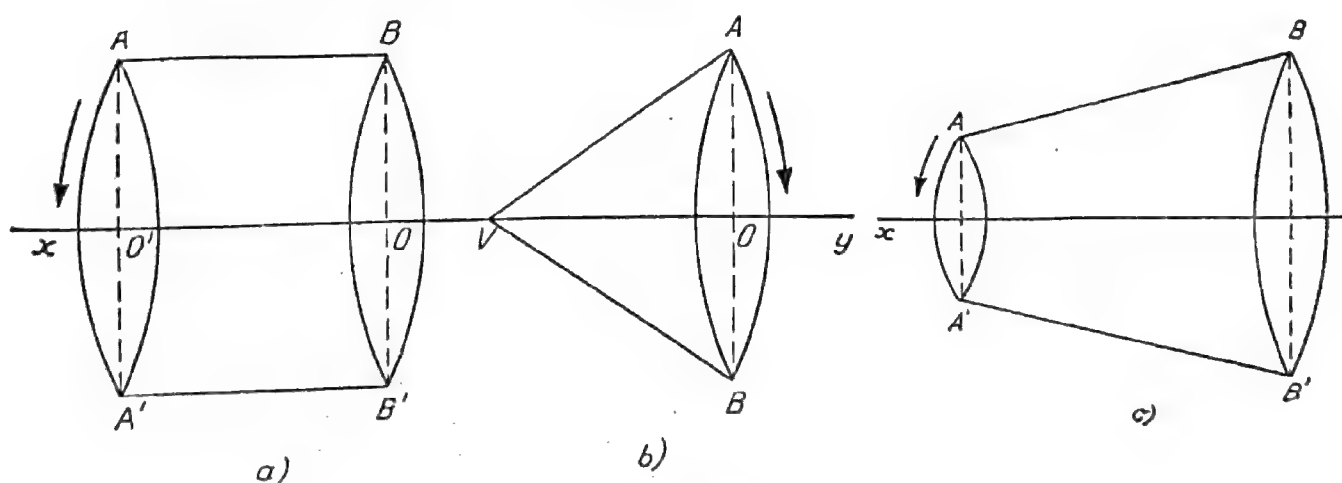


Fig. 42



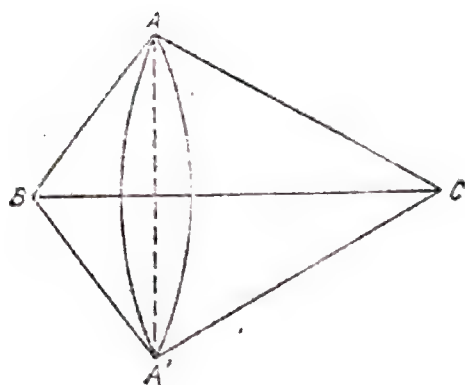


Fig. 43

- 3) Să se găsească corpurile generate prin rotirea
- unui triunghi dreptunghic în jurul ipotenuzei;
  - unui trapez în jurul bazei mari;
  - unui trapez în jurul bazei mici.
- a) Pentru a stabili corpul născut prin rotirea

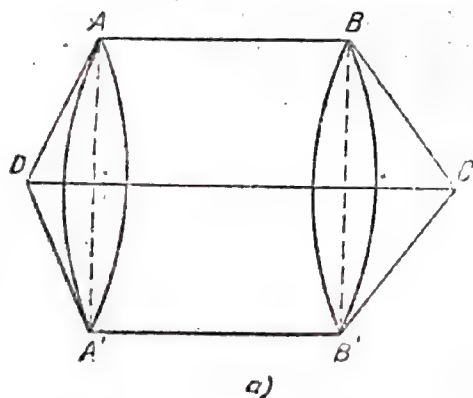
unui triunghi dreptunghic  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) în jurul ipotenuzei, rotim vârful  $A$  de  $180^\circ$  și obținem  $A'$ , simetricul punctului  $A$  față de  $BC$ . Punctele  $B$  și  $C$  fiind pe axă, prin rotație rămân pe loc (fig. 43). Segmentele  $AB$ ,  $AC$  rotite de  $180^\circ$  sînt  $A'B$  și  $A'C$ . Prin rotirea de  $360^\circ$  se obțin două conuri cu aceeași bază, un cerc cu raza egală cu înălțimea relativă la ipotenuza triunghiului  $ABC$ . Cele două catete devin generatoarele conurilor iar înălțimea unuia din conuri este proiecția generatoarei respective pe axă.

b) Rotim vîrfurile bazei mici de  $180^\circ$  deci luăm  $A'$ ,  $B'$  simetricele punctelor  $A$  și  $B$ , și desăm cercurile de diametru  $AA'$ ,  $BB'$ . Am obținut un corp format dintr-un cilindru terminat la capete cu două conuri. Razele cercurilor de bază sînt egale cu înălțimea trapezului (fig. 44, a).

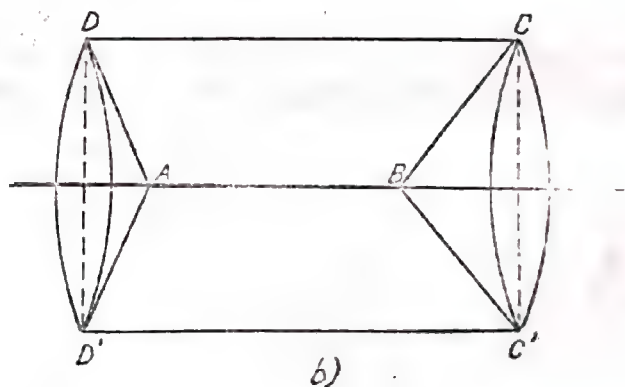
c) Rotim de  $180^\circ$  vîrfurile bazei mari  $DC$  în jurul bazei mici (prelungită) luăm simetricele  $C'$ ,  $D'$  ale punctelor  $C$ ,  $D$  față de  $AB$ . Obținem un cilindru scobit la capete, un cilindru din care se scot două conuri (fig. 44, b).

Prin rotirea unui semicerc de  $360^\circ$  sau a unui cerc de  $180^\circ$  în jurul unui diametru, ia naștere o sferă care are centrul în centrul semicercului (cercului) și ca rază, raza semicercului (cercului).

În cele ce urmează vom întîlni și alte metode folosite în rezolvarea problemelor: metoda figurilor asemenea, translația, construcții geometrice etc.



a)



b)

Fig. 44



## IV

### Paralelismul dreptelor și planelor

Am definit, în introducere, dreptele paralele. Existența lor este dată de teorema:

**T e o r e m ă.** *Într-un plan, două drepte perpendiculare pe aceeași dreaptă sînt paralele.*

Pentru demonstrare folosim metoda reducerii la absurd. Negăm propoziția dată. Există în plan două drepte perpendiculare pe o dreaptă care nu sînt paralele. Atunci, se întîlnesc într-un punct  $M$ . Rezultă că din  $M$  s-ar putea duce două perpendiculare pe  $d$  în planul determinat de dreaptă și punctul  $M$  ceea ce este imposibil. Deci cele două drepte nu se întîlnesc.

Pe baza acestei teoreme putem afirma că dintr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă la acea dreaptă. Cîte paralele se pot duce? La această întrebare răspunsul ni-l dă o axiomă (postulat).

**P o s t u l a t u l l u i E u c l i d .** *Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă.*

**T e o r e m ă.** *Dacă două drepte dintr-un plan, tăiate de o secantă, formează unghiuri alterne interne egale, atunci dreptele sînt paralele.*

Fie  $a, b$  două drepte și secanta  $c$  care taie cele două drepte respectiv în  $A$  și  $B$  formînd unghiurile alterne interne  $\hat{1}$  și  $\hat{2}$ , egale (fig. 45). Putem dovedi că dreptele  $a$  și  $b$  sînt paralele dacă dovedim că ele sînt perpendiculare pe aceeași dreaptă.

Prin  $O$ , mijlocul segmentului  $AB$ , ducem  $OC \perp a$ ,  $OC$  prelungită taie pe  $b$  în  $D$ ; s-au format triunghiurile  $COA$  și  $DOB$ .

$$\Delta COA = \Delta OBD \quad \left\{ \begin{array}{l} OA = OB \text{ din construcție} \\ \hat{1} = \hat{2} \text{ din ipoteză} \\ \widehat{COA} = \widehat{BOD} \text{ opuse la vîrf.} \end{array} \right.$$

Rezultă că și celelalte elemente corespunzătoare sînt egale deci:  $\widehat{ACO} = \widehat{ODB} = 1 \text{ dr.}$

$CD$  este deci perpendiculară pe  $b$ . Dreptele  $a$  și  $b$  din plan, fiind perpendiculare pe aceeași dreaptă, sînt paralele.

**Consecință.** Dacă o dreaptă este perpendiculară pe o altă dreaptă, ea este perpendiculară pe orice paralelă la această dreaptă.

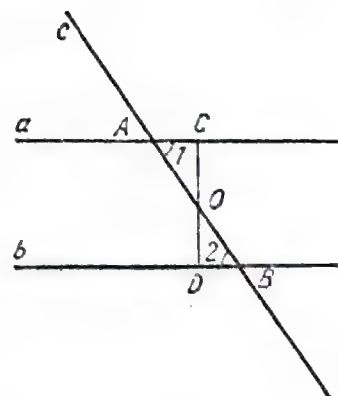


Fig. 45

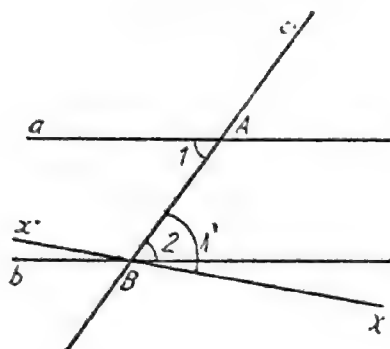


Fig. 46

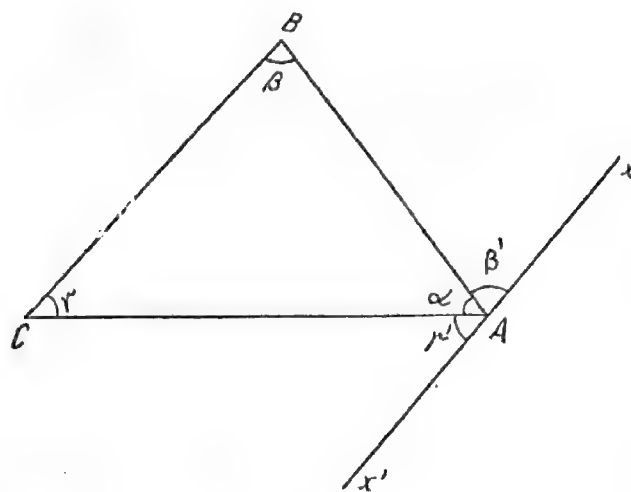


Fig. 47

**Teoremă reciprocă.** Dacă două drepte sînt paralele, atunci o secantă care le taie formează unghiuri alterne interne egale.

Fie  $a \parallel b$  și secanta  $c$  care taie  $a$  și  $b$  respectiv în  $A$  și  $B$  (fig. 46). Vrem să dovedim că  $\hat{1} = \hat{2}$ . Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că există o secantă  $c$  astfel încît  $\hat{1} \neq \hat{2}$ , fie de exemplu  $\hat{1} > \hat{2}$ . Ducem prin  $B$  o semidreaptă  $Bx$  care să formeze cu  $b$  un unghi  $\hat{1}' = \hat{1}$  neadiacent cu unghiul  $\hat{2}$ . Pe baza teoremei precedente rezultă  $a \parallel Bx$ . Dar din ipoteză  $a \parallel b$ . Rezultă că prin  $B$  se pot duce două paralele la dreapta  $a$  ceea ce contrazice postulatul lui Euclid. Deci  $\hat{1} = \hat{2}$ ; semidreapta  $Bx$  are direcția dreptei  $b$ .

**Teoremă.** Suma unghiurilor interioare ale unui triunghi este egală cu 2 dr ( $180^\circ$ ).

Fie un triunghi oarecare  $ABC$ . Notăm cu  $\alpha, \beta, \gamma$  cele trei unghiuri ale triunghiului și căutăm să formăm un unghi egal cu  $\alpha + \beta + \gamma$  și care să aibă vîrf într-un vîrf al triunghiului. Ducem printr-un vîrf al triunghiului o paralelă la latura opusă (fig. 47). Ducem prin  $A$  o paralelă  $x'x$  la  $BC$ .

S-au format unghiurile adiacente  $\alpha, \beta', \gamma'$  (fig. 47) dar:

$\beta = \beta'$  (alterne interne formate de  $AB$  și  $x'x \parallel BC$ ).

$\gamma = \gamma'$  (alterne interne formate de  $AC$  și  $x'x \parallel BC$ ).

Dar  $\alpha + \beta' + \gamma' = 2$  dr deci și  $\alpha + \beta + \gamma = 2$  dr.

**Consecințe.** 1° Unghiul adiacent suplementar unghiului unui triunghi, numit unghi exterior triunghiului (avînd ca vîrf un vîrf al triunghiului și ca laturi o latură a triunghiului și prelungirea celeilalte laturi a triunghiului, care pornește din același vîrf), este egal cu suma unghiurilor interioare neadiacente lui.

2° Un triunghi echilateral are fiecare unghi egal cu  $60^\circ$ .

3° Unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic sînt complementare. Triunghiul dreptunghic isoscel are fiecare unghi ascuțit de  $45^\circ$ .

4° În triunghiul isoscel  $ABC$  ( $AB = AC$ ), avem

$$1) \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}); \quad 2) \hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}.$$

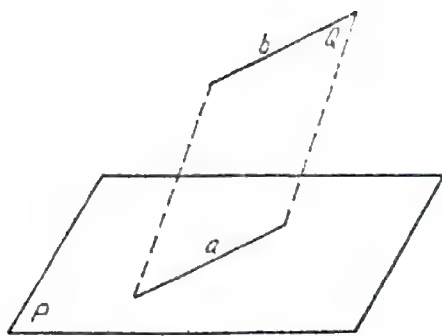


Fig. 48

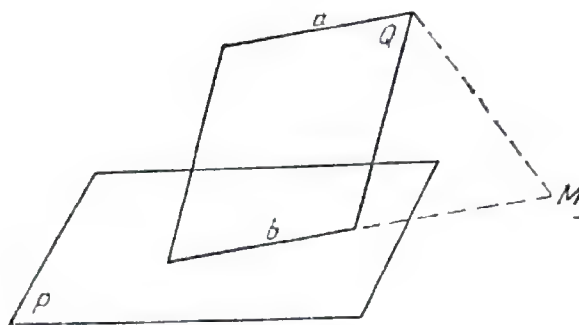


Fig. 49

5° Un triunghi are cel mult un unghi drept sau obtuz.

**T e o r e m ă.** Suma unghiurilor interioare ale unui poligon convex cu  $n$  laturi este  $S_n = (n - 2) 2\text{dr}$  sau  $S_n = (n - 2) 180^\circ$ .

În adevăr, dintr-un vîrf al poligonului ducem toate diagonalele (segmente care unesc două vîrfuri care nu sînt pe aceeași latură) se formează  $(n - 2)$  triunghiuri. Suma unghiurilor acestor triunghiuri este suma unghiurilor poligonului:

$$S_n = (n - 2) 2 \text{ dr sau } S_n = (n - 2) 180^\circ.$$

### Dreaptă paralelă cu un plan

**T e o r e m ă.** Dacă o dreaptă este paralelă cu o dreaptă din plan și nu e conținută în plan, atunci ea este paralelă cu planul.

Fie  $P$  planul și dreapta  $a \subset P$  iar  $b \parallel a$ . Dreptele  $a$  și  $b$  fiind paralele, determină un plan  $Q$  (fig. 48) și  $P \cap Q = a$ ; dreapta  $b$  nu poate intersecta planul  $P$  decît într-un punct al dreptei de intersecție a planelor  $P$  și  $Q$  (dreapta  $a$ ). Dar  $a \parallel b$  deci  $b$  nu intersectează planul;  $b \parallel P$ .

**T e o r e m ă.** Dacă o dreaptă  $a$  este paralelă cu un plan  $P$ , orice plan  $Q$  care trece prin  $a$  și intersectează planul  $P$ , îl intersectează după o dreaptă  $b$  paralelă cu  $a$ .

Fie planul  $P$  și dreapta  $a \parallel P$ . Un plan oarecare  $Q$ , care trece prin  $a$  ( $a \in Q$ ), intersectează planul  $P$  după o dreaptă  $b$  ( $P \cap Q = b$ ) (fig. 49). Fiind în același plan ( $Q$ ), dreptele  $a$  și  $b$  sînt concurente sau paralele. Dacă  $a$  și  $b$  sînt concurente, ele se întîlnesc într-un punct  $M$  al dreptei de intersecție a celor două plane, dreapta  $b$ . Deci dreapta  $a$  înțeapă planul în  $M$  ceea ce contrazice ipoteza ( $a \parallel P$ ). Așadar  $a \parallel b$ .

**T e o r e m ă.** În plan, două drepte paralele cu a treia sînt paralele între ele.

Fie  $a \parallel b$  și  $b \parallel c$ , în același plan  $P$  (fig. 50). Trebuie să demonstrăm că  $a \parallel c$ .

Fiind în același plan, dreptele  $a$  și  $c$  pot fi concurente sau paralele. Dacă sînt concurente, ele se întîlnesc într-un punct  $M$ . Rezultă că din  $M$  se pot duce două paralele la dreapta  $b$  ceea ce contrazice postulatul lui Euclid. Dreptele nu pot fi concurente. Ele aparținînd aceluiași plan, trebuie să fie paralele  $a \parallel c$ .

Teorema se poate demonstra și în cazul cînd dreptele  $a, b, c$  nu sînt situate în același plan (una

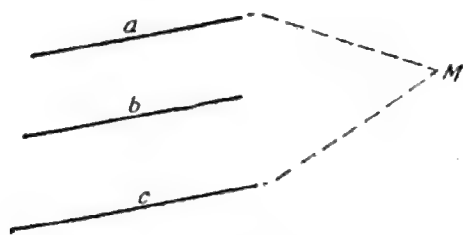


Fig. 50



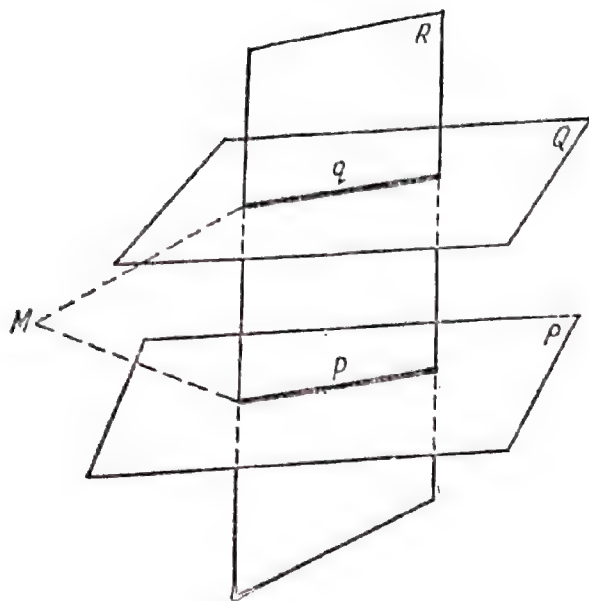


Fig. 51

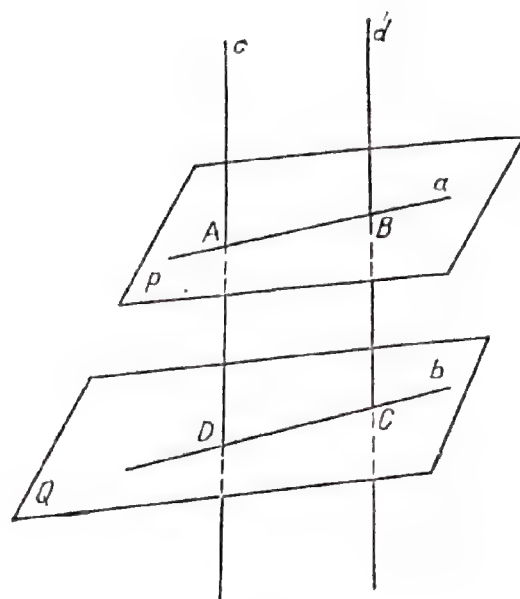


Fig. 52

din drepte nu aparține planului determinat de celelalte două) și în cazul cînd în loc de drepte luăm planele  $P, Q, R$ . Dacă  $P \parallel Q$  și  $P \parallel R$  atunci  $Q \parallel R$ .  
Spunem că relația de paralelism este tranzitivă.

### Plane paralele

**Teoremă.** Dacă două plane paralele sînt intersectate de un al treilea plan, atunci dreptele de intersecție sînt paralele.

Fie planele  $P \parallel Q$ , planul  $R$ ,  $P \cap R = p$  și  $R \cap Q = q$  (fig. 51).

Dreptele  $p$  și  $q$  fiind în același plan sînt concurente, sau paralele. Dacă aceste două drepte  $p$  și  $q$  sînt concurente într-un punct  $M$ , atunci punctul  $M$  este un punct comun planelor  $P$  și  $Q$  ceea ce contrazice ipoteza ( $P \parallel Q$ ). Deci  $p$  și  $q$  nu pot fi concurente. Ele, aparținînd unui plan ( $R$ ), sînt paralele:  $p \parallel q$ .

**Teoremă.** Dacă două drepte (sau două plane) sînt paralele, atunci ele determină, pe două secante paralele, segmente egale.

a) Fie dreptele paralele  $a \parallel b$  (sau  $P \parallel Q$ ) tăiate de dreptele  $c \parallel d$  (fig. 52). Notăm punctele de intersecție cu  $A, B, C, D$ .

Patrulaterul  $ABCD$  este paralelogram deci  $AD = BC$  (laturi opuse în paralelogram).

**Teoremă.** Dacă două unghiuri au laturile respectiv paralele, atunci ele sînt egale dacă amîndouă sînt ascuțite (obtuze) și suplimentare dacă unul este ascuțit și celălalt obtuz.

a) Cele două unghiuri sînt în același plan (fig. 53, a). Fie unghiurile  $xOy$  și  $x'O'y'$  (ambele ascuțite) astfel ca  $Ox \parallel O'x'$  și  $Oy \parallel O'y'$ . și  $A = Ox \cap O'y'$ .

1)  $\widehat{xAy'} = \widehat{x'O'y'}$  (corespondente,  $O'x' \parallel Ox$  tăiate de  $O'y'$ ).

2)  $\widehat{xAy'} = \widehat{xOy}$  (corespondente,  $O'y' \parallel Oy$  tăiate de  $Ox$ ).

Din 1) și 2) rezultă:  $\widehat{x'O'y'} = \widehat{xOy}$  (relația de egalitate este tranzitivă).



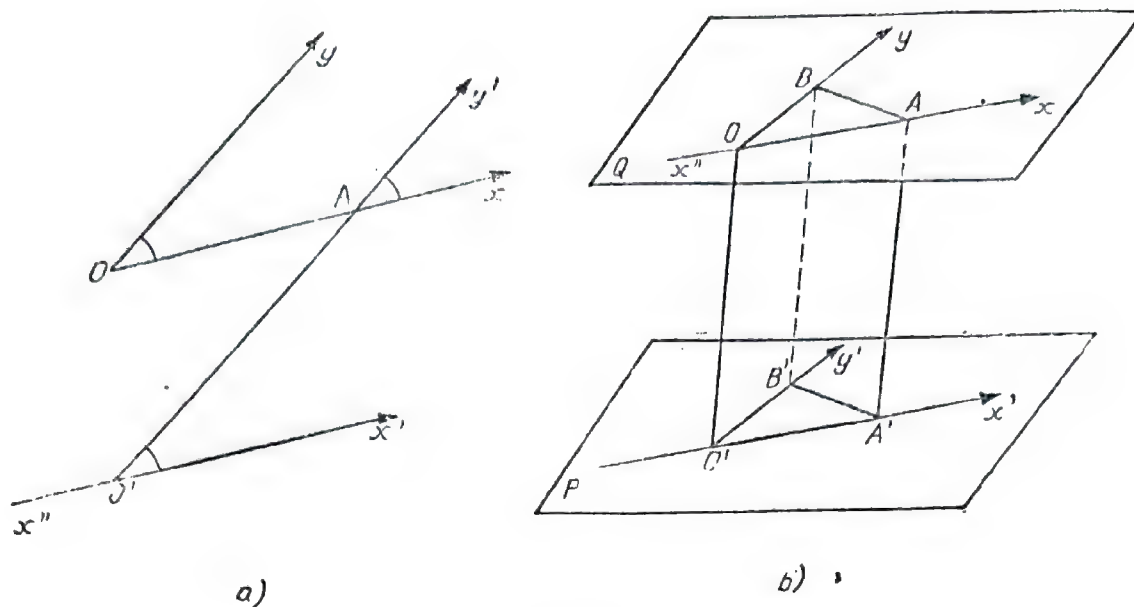


Fig. 53

Dacă ducem semidreapta  $O'x''$  în sens contrar semidreptei  $O'x'$  se obține unghiul obtuz  $x''O'y'$  care are  $O'x'' \parallel Ox$ ,  $O'y' \parallel Oy$ . Dar unghiul  $x''O'y'$  este suplementul unghiului  $x'O'y'$  deci

$$\widehat{xOy} + \widehat{x''O'y'} = 2 \text{ dr.}$$

2) Cele două unghiuri ascuțite sînt în plane diferite (fig. 53,b), și  $Ox \parallel O'x'$ ,  $Oy \parallel O'y'$ . Vom demonstra egalitatea unghiurilor  $xOy$  și  $x'O'y'$  încadrîndu-le în triunghiuri egale. Luăm pe semidreptele  $Ox$  și  $O'x'$  segmentele egale  $OA = O'A'$ ; pe semidreptele  $Oy$  și  $O'y'$  segmentele egale  $OB = O'B'$ . Patrulaterul  $OAA'O'$  și  $OB'BO'$  avînd fiecare două laturi opuse paralele și egale, sînt paralelograme deci 1)  $AA' \parallel OO'$ ; 2)  $BB' \parallel OO'$ . Paralelismul și egalitatea fiind tranzitive,  $BB' \parallel AA'$  deci patrulaterul  $ABB'A'$  este paralelogram. Rezultă  $AB = A'B'$ . Triunghiurile  $OAB$  și  $O'A'B'$  sînt egale avînd laturile respective egale. Rezultă  $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$  (se opun în triunghiuri egale la laturi egale:  $AB = A'B'$ ).

Ca și în cazul precedent  $\widehat{x''O'y'} + \widehat{xOy} = 2 \text{ dr.}$

**Te o r e m ă .** Dacă mai multe drepte (plane) paralele determină pe o secantă segmente egale, ele vor determina pe orice altă secantă segmente egale între ele.

a) Fie  $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$  și secanta  $a$  care taie cele trei drepte în punctele  $A, B, C$ , (fig. 54, a) astfel ca  $AB = BC$ . Ducem o secantă  $b$  și notăm punctele de intersecție cu cele trei drepte respectiv cu  $A', B', C'$ . Vrem să demonstrăm că dacă  $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$  și  $AB = BC$ , atunci  $A'B' = B'C'$ .

În adevăr, dacă ducem prin  $A'$  și  $B'$  paralele la dreapta  $a$  și notăm cu  $A''$  și  $B''$  intersecțiile cu dreptele  $d_2, d_3$  avem  $\triangle A'B'A'' = \triangle B'C'B''$ . Rezultă:  $A'B' = B'C'$  (se opun în triunghiuri egale la unghiuri egale). Dacă dreptele  $a$  și  $b$  sînt paralele, teorema este adevărată pe baza teoremei precedente.

b) Dacă planele  $P \parallel Q \parallel R$  determină pe o secantă  $a$  segmente egale,  $AB = BC$  (fig. 54, b), atunci ele determină pe orice secantă  $b$ , segmente egale:  $A'B' = B'C'$ . Ducem prin  $A'$  o secantă  $b'$  paralelă cu  $a$  ( $b' \parallel a$ ), care taie planele  $Q$  și  $R$  în  $B'', C''$ .

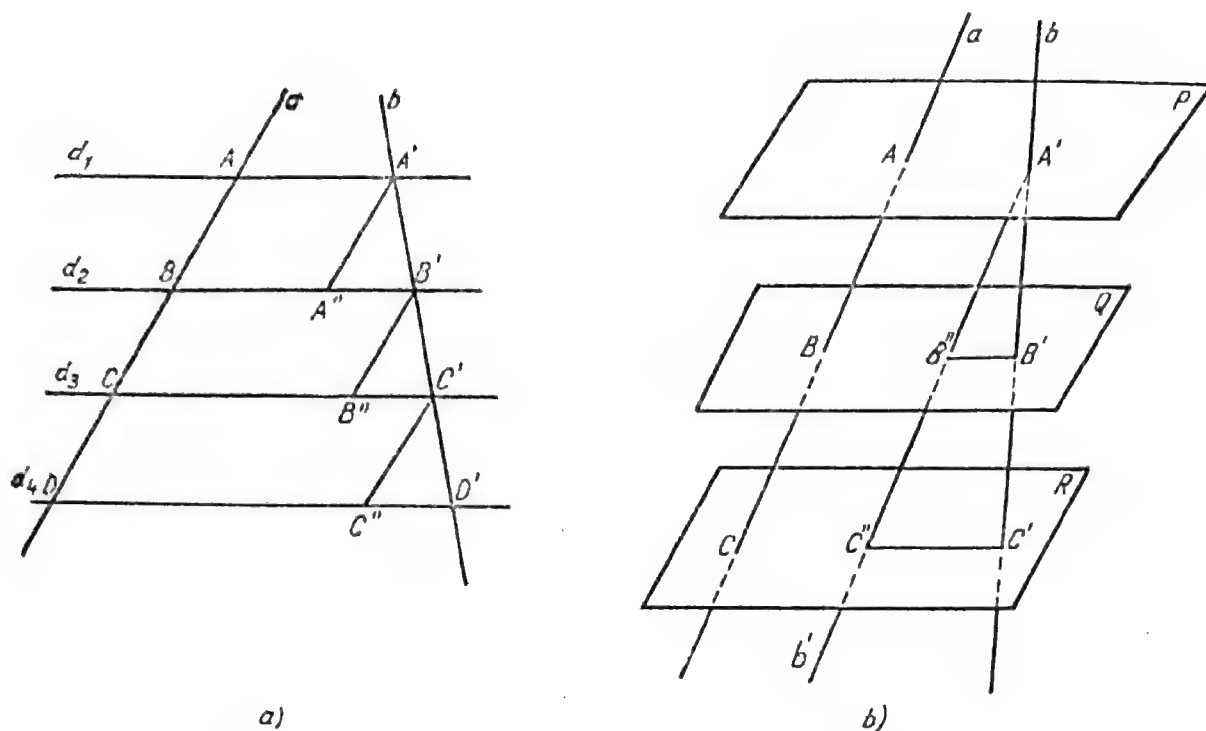


Fig. 54

Vom avea:  $A'B'' = AB$  și  $B''C'' = BC$  (segmente paralele cuprinse între plane paralele). Dar  $AB = BC$  deci  $A'B'' = B''C''$ . Planul determinat de  $b'$  și  $b$  taie planele paralele  $Q$  și  $R$  după dreptele paralele  $B'B''$  și  $C'C''$ . Aplicând cele stabilite la punctul  $a$  (dreptele paralele  $B'B'' \parallel C'C''$  determină pe  $b$  segmente egale):

$$A'B' = B'C'.$$

**Teoremă.** Mai multe drepte paralele determină pe două secante segmente proporționale.

Fie dreptele  $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4$  și secantele  $a$  și  $b$  care le intersectează în  $A, B, C, D$  respectiv  $A', B', C', D'$  (fig. 55). Notăm raportul segmentelor  $AB$  și  $BC$  cu  $\frac{m}{n}$  (presupun că există o unitate de măsură care se cuprinde în  $AB$  de  $m$  ori și în  $BC$  de  $n$  ori). Împărțind segmentul  $AB$  în  $m$  părți egale și  $BC$  în  $n$  părți egale, ducem prin punctele de diviziune paralele cu  $d_1$ , ele vor fi paralele între ele și paralele cu  $d_2$  și  $d_3$  (paralelismul este o relație tranzitivă). Aceste  $m + n$  paralele vor determina, pe secanta  $b' \parallel b$  prin  $A$ ,  $m + n$  puncte care vor împărți pe  $AB''$  în  $m$  părți egale și pe  $B''C''$  în  $n$  părți egale

$$\frac{AB''}{B''C''} = \frac{m}{n}. \text{ Dar } AB'' = A'B' \text{ și } B''C'' = B'C'$$

$$\text{deci } \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ sau } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

În mod analog se face raționamentul dacă avem mai mult de trei drepte paralele.

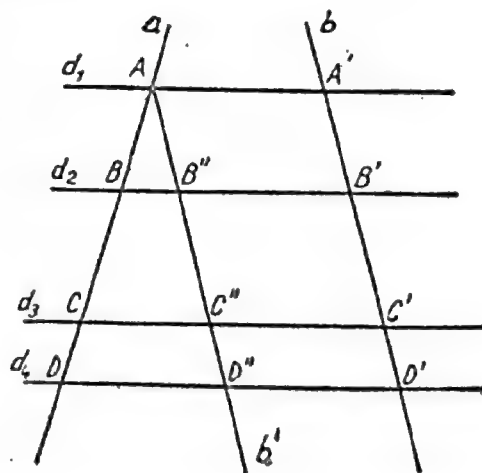


Fig. 55

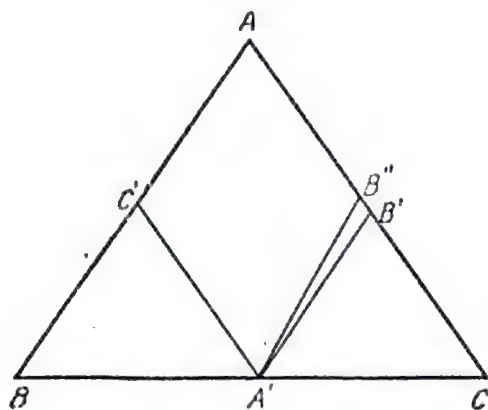


Fig. 56

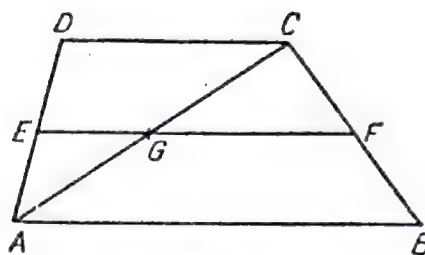


Fig. 57

## Aplicații

1) Segmentul care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi (linia mijlocie a triunghiului), este paralel cu a treia latură și egal cu jumătate din ea.

În triunghiul  $ABC$  dacă  $A'B = A'C$ ,  $B'A = B'C$ , atunci

$$A'B' \parallel AB \text{ și } A'B' = \frac{AB}{2}.$$

În adevăr,  $A'B'$  fiind în planul triunghiului poate fi concurentă sau paralelă cu  $AB$ . Dacă  $A'B'$  nu este paralelă cu  $AB$  ducem prin  $A'$  dreapta  $A'B'' \parallel AB$ , atunci  $A'B''$  determină pe  $AC$  două segmente egale deci  $B''$  se confundă cu  $B'$  și  $A'B' \parallel AB$  (fig. 56).

Ducând prin  $A'$  dreapta  $A'C' \parallel AC$ , punctul  $C'$  împarte pe  $AB$  în două părți egale deci: 1)  $C'A = C'B$ . Dar 2)  $C'B = A'B'$  (laturi opuse în paralelogram). Din (1) și (2) rezultă

$$C'B = \frac{AB}{2} = A'B', \text{ deci } A'B' = \frac{AB}{2}.$$

2) Segmentul care unește mijloacele laturilor neperalele în trapez (linia mijlocie) este paralelă cu bazele și egală cu semisuma bazelor.

Fie trapezul  $ABCD$  și  $EF$  linia mijlocie. Diagonala  $AC$  taie pe  $EF$  în  $G$  (fig 57). Să arătăm că: a)  $EF \parallel DC$ . În adevăr, ducând prin  $F$  o paralelă la  $DC$ , ea va împărți segmentul  $AC$  în două părți egale deci va trece prin  $G$  și  $E$ .

b) În triunghiul  $ADC$ ,  $EG \parallel DC$  și  $AE = ED$  deci  $EG$  este linie mijlocie,

$$EG = \frac{DC}{2}. \text{ Analog în } \triangle ABC, GF = \frac{AB}{2}, \text{ deci } EF = \frac{DC + AB}{2}.$$

## Paralelogramul

**Teoremă.** Dacă un patrulater  $ABCD$  este paralelogram, atunci avem relațiile:

- $\hat{A} = \hat{C}$  și  $\hat{B} = \hat{D}$ ;
- $AB = CD$  și  $AD = BC$ ;
- $OB = OD$  și  $OA = OC$  ( $O$  fiind intersecția diagonalelor);
- $O$  este centrul de simetrie.

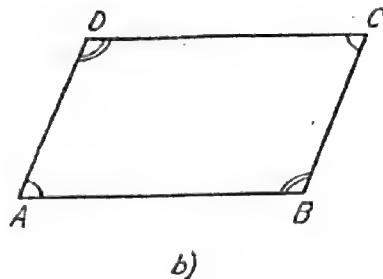
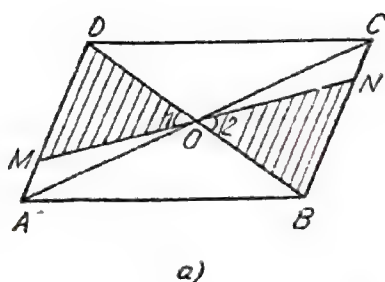


Fig. 58

În adevăr, fie patrulaterul  $ABCD$  în care  $AB \parallel DC$  și  $AD \parallel BC$  (fig. 58, a).

a)  $\hat{A} + \hat{B} = 2 \text{ dr}$  și  $\hat{B} + \hat{C} = 2 \text{ dr}$  (unghiuri interne de aceeași parte a secantei formate de drepte paralele tăiate de o secantă).

Rezultă:  $\hat{A} = \hat{C}$ . Analog

$$\hat{B} = \hat{D}.$$

b) Ducînd diagonala  $AC$  s-au format două triunghiuri  $ACD$  și  $ABC$  egale ( $\hat{CAB} = \hat{ACD}$  și  $\hat{ACB} = \hat{DAC}$  ca unghiuri alterne interne formate de drepte paralele tăiate de secanta  $AC$  și  $AC$  comună). Rezultă:

$$AB = CD, AD = BC \text{ (se opun în triunghiuri egale la unghiuri egale).}$$

c) Ducînd și diagonala  $BD$ , care intersectează diagonala  $AC$  în  $O$ , s-au format triunghiurile egale  $DOC$  și  $AOB$ .

$$\triangle DOC = \triangle AOB \text{ (} DC = AB, \hat{DCO} = \hat{OAB} \text{ și } \hat{ODC} = \hat{OBA} \text{)}$$

unghiuri alterne interne formate de  $DC \parallel AB$ , tăiate de secantele  $AC$  și  $DB$ ). Rezultă:  $OC = OA$  și  $OD = OB$ .

d) Fie  $M$  un punct pe una din laturile paralelogramului (de exemplu pe  $AD$ ). Simetricul lui față de  $O$  se găsește pe  $BC$ . În adevăr,  $\triangle MOD = \triangle NOB$  ( $OD = OB$  — din proprietățile paralelogramului;  $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ , opuse la vîrf,  $\hat{ODM} = \hat{OBN}$  alterne interne;  $AD \parallel BC$  tăiate de  $DB$ ). Rezultă:

$$OM = ON. \text{ Deci } N \text{ este simetricul lui } M \text{ față de } O.$$

**Teorema reciprocă.** Dacă într-un patrulater  $ABCD$  avem relațiile:

$$a) \hat{A} = \hat{C} \text{ și } \hat{B} = \hat{D};$$

$$b) AB = CD \text{ și } AD = BC;$$

$$c) AB \parallel CD \text{ și } AB = CD;$$

$$d) OB = OD \text{ și } OA = OC \text{ (} O \text{ intersecția diagonalelor);}$$

e) punctul de intersecție a diagonalelor este centru de simetrie, atunci patrulaterul este paralelogram.

În patrulaterul  $ABCD$ :

$$\hat{A} = \hat{C} \text{ și } \hat{B} = \hat{D} \text{ (fig. 58, b). Rezultă}$$

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D} \text{ și } \hat{A} + \hat{D} = \hat{C} + \hat{B}.$$

Dar suma unghiurilor în patrulater este  $360^\circ$ . Vom avea:

$$1) \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \text{ deci } AD \parallel BC,$$

$$2) \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \text{ deci } AB \parallel DC.$$



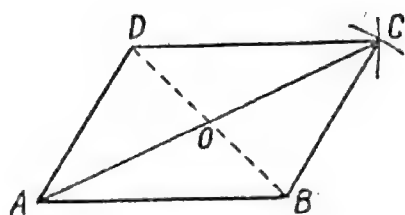


Fig. 59

Patrulaterul este paralelogram.

b) În patrulaterul  $ABCD$  în care  $AB = CD$  și  $AD = BC$  (fig. 59),  $\triangle ABC = \triangle ADC$  (având laturile respectiv egale). Rezultă:

- 1)  $\widehat{DAC} = \widehat{ACB}$ . Unghiurile alterne interne fiind egale,  $AD \parallel BC$ .
- 2)  $\widehat{DCA} = \widehat{CAB}$ . Unghiurile alterne interne fiind egale,  $DC \parallel AB$ .

c) În patrulaterul  $ABCD$  avem  $AB \parallel CD$  și  $AB = CD$  (fig. 59).  $\triangle ABC = \triangle ADC$  ( $AB = DC$ ,  $AC = AC$ ,  $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$ ) Rezultă  $\widehat{ACB} = \widehat{DAC}$  așadar  $AD \parallel BC$ .

Patrulaterul  $ABCD$  este paralelogram.

d) În patrulaterul  $ABCD$  notînd cu  $O$  intersecția diagonalelor  $AC$  și  $DB$  (fig. 59), avem:  $OB = OD$  și  $OA = OC$

$$\triangle AOB = \triangle DOC \quad (OB = OD, \quad OA = OC, \quad \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2, \text{ opuse la vîrf}).$$

Rezultă:

$$1) \widehat{BAO} = \widehat{OCD} \quad \text{deci} \quad AB \parallel CD.$$

Analog, din  $\triangle AOD = \triangle BOC$  rezultă:

$$2) \widehat{OAD} = \widehat{OCB} \quad \text{deci} \quad AD \parallel BC.$$

Patrulaterul  $ABCD$  este paralelogram.

e) Dacă patrulaterul are ca centru de simetrie punctul  $O$  de intersecție a diagonalelor, atunci  $OB = OD$ ,  $OC = OA$ . Pe baza propoziției precedente patrulaterul este paralelogram.

## Paralelograme particulare

**Dreptunghiul** este paralelogramul cu un unghi drept. Dreptunghiul fiind paralelogram, are toate proprietățile paralelogramului. Pe baza acestor proprietăți și a definiției se demonstrează că:

- a) dreptunghiul are toate unghiurile egale,
- b) dreptunghiul are diagonalele egale.

În adevăr, fie dreptunghiul  $ABCD$  (fig. 60) în care  $\widehat{A} = 1$  dr. Pe baza proprietăților paralelogramului avem  $\widehat{A} = \widehat{C}$  și  $\widehat{A} + \widehat{B} = 2$  dr. Rezultă:  $\widehat{B} = 1$  dr și  $\widehat{D} = 1$  dr.

b) Pe figura 61 ducîndu-se diagonalele  $AC$  și  $BD$ , avem:

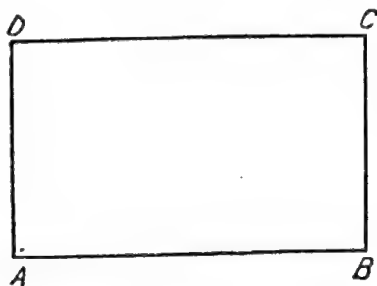


Fig. 60

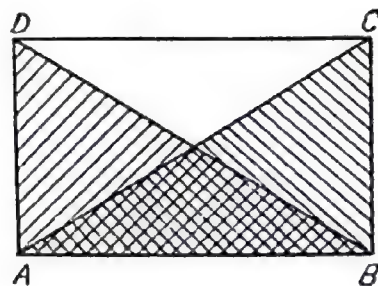


Fig. 61

$\triangle ABC = \triangle ABD$  (triunghiuri dreptunghice cu catetele respective egale). Rezultă:  $AC = BD$ .

Rombul este paralelogramul cu două laturi alăturate egale.

Pe baza definiției și a proprietăților paralelogramelor se demonstrează că:

- a) rombul are laturile egale,
- b) diagonalele rombului sînt perpendiculare și sînt bisectoarele unghiurilor rombului.

a) În figura 62 avem rombul  $ABCD$  în care  $AB = BC$ , rezultă din proprietățile paralelogramului  $AB = DC$  și  $BC = AD$

b)  $\triangle ABC$  este isoscel ( $AB = BC$ ) deci mediana  $BO$  este și înălțime ( $BO \perp AC$ ) și bisectoare ( $\widehat{ABO} = \widehat{OBC}$ ).

În mod analog pentru diagonala  $AC$ .

Pătratul este dreptunghiul cu două laturi alăturate egale sau rombul cu un unghi drept. Fiind și dreptunghi și romb, are atît proprietățile dreptunghiului cît și ale rombului.

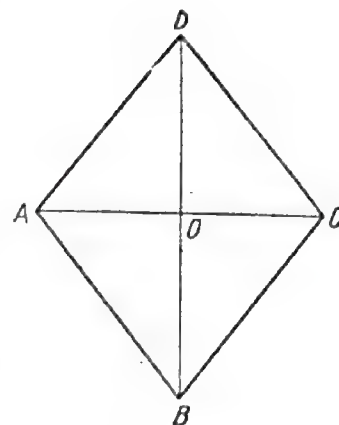


Fig. 62

### Aplicații

1) Să se demonstreze că unind consecutiv mijloacele laturilor într-un patrulater convex obținem un paralelogram. În ce caz acest paralelogram este: a) dreptunghi? b) romb? c) pătrat?

Fie patrulaterul  $ABCD$  (fig. 63) și punctele  $L, M, N, P$  mijloacele laturilor  $AB, BC, CD, DA$ .

În patrulaterul  $LMNP$  avem:

$PL \parallel MN$  și  $PL = MN$  (linii mijlocii în triunghiurile  $DAB$  și  $DBC$ ). Deci patrulaterul  $LMNP$  este paralelogram.

a) Paralelogramul este dreptunghi cînd are un unghi drept. Dar  $AC \parallel PN$  și  $PL \parallel DB$ . Pentru ca unghiul  $\widehat{LPN}$  să fie drept trebuie ca diagonalele  $AC$  și  $BD$  ale patrulaterului să fie perpendiculare.

b) Pentru ca paralelogramul să fie romb trebuie ca  $PL = PN$  deci trebuie ca diagonalele  $AC$  și  $BD$  ale patrulaterului să fie egale.

c) Pentru ca paralelogramul să fie pătrat trebuie să fie și romb și dreptunghi deci  $AC$  și  $BD$ , diagonalele patrulaterului trebuie să fie egale și perpendiculare.

2) Să se demonstreze că bisectoarele unghiurilor unui paralelogram intersectîndu-se, formează un dreptunghi.

Fie paralelogramul  $ABCD$  (fig. 64). Bisectoarea unghiului  $A$  și bisectoarea unghiului  $C$  intersectează bisectoarele din  $B$  și  $D$  respectiv în  $L, P$  și  $M, N$ . Dar bisectoarele

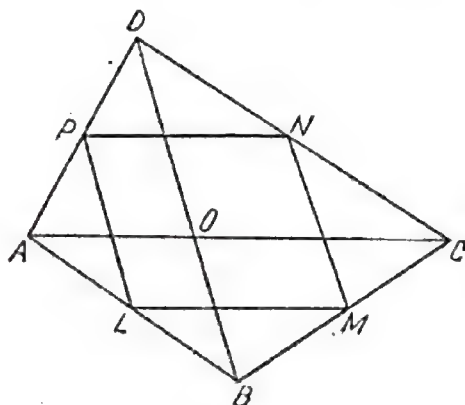


Fig. 63

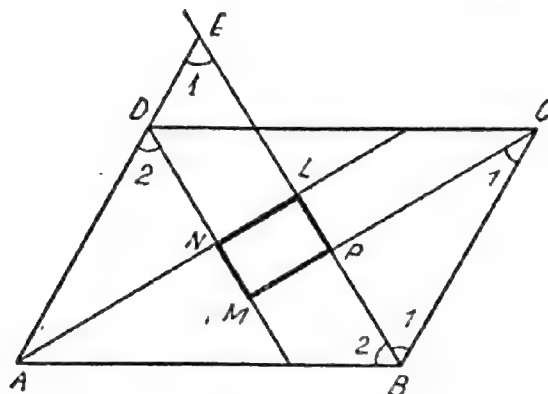


Fig. 64

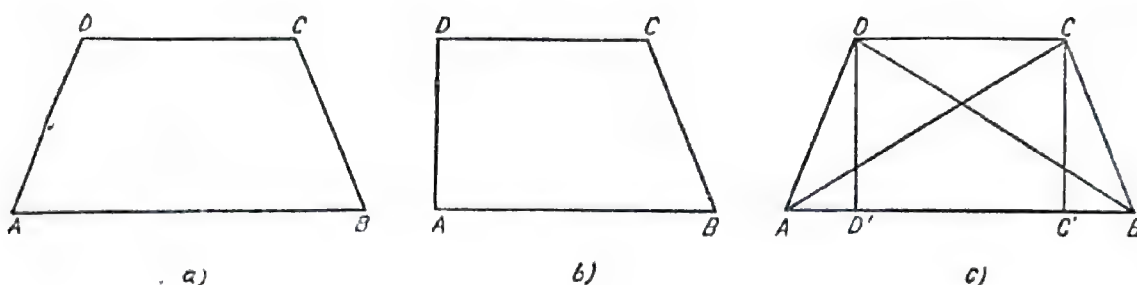


Fig. 65

duse din vîrfurile opuse ale paralelogramului sînt paralele. În adevăr, dacă notăm cu  $E$  intersecția bisectoarei din  $B$  cu latura opusă  $AD$  avem:

$$\hat{B}_1 = \hat{E}_1 \text{ (alterne interne; } AD \parallel BC \text{ și secanta } BE)$$

dar  $\hat{B}_1 = \hat{D}_2$  (jumătăți de unghiuri egale). Deci  $BE \parallel DN$  (formează cu  $AD$  unghiuri corespondente egale  $\hat{D}_2 = \hat{E}_1$ ). Analog,  $AN \parallel CM$ .

Patrulaterul  $LMNP$  este paralelogram.

În triunghiul  $PCB'$  avem:  $\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 90^\circ$  ( $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ ) rezultă

$$\widehat{BPC} = 90^\circ \text{ deci } \widehat{LPM} = 90^\circ.$$

Paralelogramul  $LMNP$  avînd un unghi drept este dreptunghi.

## Trapezul

*Trapezul* este patrulaterul care are numai două laturi paralele.

Laturile paralele se numesc bazele trapezului (fig. 65, a). Se numește trapez dreptunghic trapezul care are un unghi drept (fig. 65, b).

Se numește trapez isoscel, trapezul în care laturile neparalele sînt egale (fig. 65, c).

În trapezul isoscel unghiurile alăturate unei baze sînt egale și diagonalele sînt egale.

În adevăr, ducînd  $DD' \perp AB$  și  $CC' \perp AB$  (fig. 65, c), triunghiurile dreptunghice  $ADD'$  și  $CC'B$  sînt egale ( $AD = CB$  și  $DD' = CC'$  ca paralele cuprinse între paralele).

Rezultă:  $\widehat{DAB} = \widehat{ABC}$ .

$$\triangle ADB = \triangle ACB \text{ (} AD = BC; \widehat{DAB} = \widehat{ABC}, AB \text{ comună)}.$$

Rezultă:  $AC = BD$ .

### Aplicație

Într-un triunghi oarecare mijloacele laturilor și piciorul unei înălțimi sînt vîrfurile unui trapez isoscel.

În adevăr notînd cu  $A', B', C'$  mijloacele laturilor și ducînd înălțimea  $AD$  (fig. 66), patrulaterul  $A'B'C'D$  este trapez căci  $B'C'$  este linie mijlocie în triunghiul  $ABC$ . Dar  $A'C' = B'D$  ( $A'C' = \frac{AC}{2}$  ca linie mijlocie și  $B'D = \frac{AC}{2}$  ca mediană în triunghiul dreptunghic  $CAD$ ) deci trapezul este isoscel.

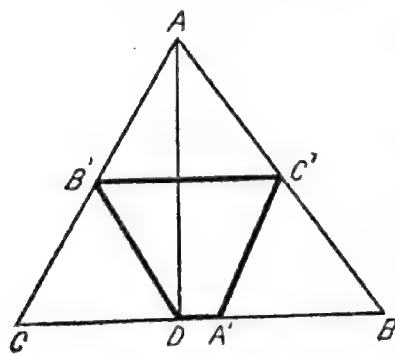


Fig. 66



## Perpendicularitatea dreptelor și a planelor

Am definit dreapta perpendiculară pe plan ca fiind dreapta perpendiculară pe toate dreptele din plan.

Condiția necesară și suficientă pentru ca o dreaptă să fie perpendiculară pe plan este dată de teorema următoare:

*Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente din plan, ea este perpendiculară pe plan.*

Dacă se dă un plan  $P$ , dreptele  $a, b \in P$  și o dreaptă  $d$  perpendiculară pe dreptele  $a$  și  $b$  ( $d \perp a, d \perp b$ ), atunci  $d \perp P$  adică  $d$  este perpendiculară pe orice altă dreaptă  $c$  conținută în planul  $P$ . Notăm cu  $O$  punctul de intersecție a dreptei  $d$  cu planul  $P$ . Ducem prin  $O$  dreptele  $a' \parallel a, b' \parallel b, c' \parallel c$  și luăm pe dreptele  $a'$  și  $b'$  respectiv punctele  $A, B$  și  $C, D$  simetrice față de  $O$  (fig. 67). Patrulaterul  $ABCD$  avînd un centru de simetrie, este paralelogram. Dreapta  $c'$  taie două laturi opuse în punctele  $M$  și  $N$  simetrice față de  $O$ .

Luăm un punct  $I \in d$  și ducem oblicele  $IC = ID$  și  $IB = IA$  (au picioarele egal depărtate de piciorul perpendicularei)  $\triangle IDB = \triangle IAC$  (laturile respectiv egale) rezultă

$$\widehat{ICM} = \widehat{IDN}.$$

$\triangle IMC = \triangle IDN$  pentru că  $IC = ID$  și  $\widehat{ICM} = \widehat{IDN}$  și  $MC = DN$  (segmente simetrice față de  $O$ ) rezultă

$$IM = IN$$

Triunghiul  $IMN$  fiind isoscel iar  $IO$  fiind mediana dusă din vîrfurile laturilor egale este și înălțime deci

$$d \perp c'.$$

Cum  $c'$  este o dreaptă oarecare a planului rezultă că  $d$  este perpendiculară pe orice dreaptă din plan;  $d \perp P$ .

**Teorema celor trei perpendiculare.** *Dacă o dreaptă  $d$  este perpendiculară pe un plan  $P$  și din piciorul acestei perpendiculare ducem o perpendiculară pe o dreaptă  $a$  conținută în planul  $P$ , atunci dreapta care unește piciorul perpendicularei a doua cu un punct al dreptei  $d$  este perpendiculară pe dreapta  $a$  conținută în plan.*

Fie planul  $P$  și dreapta  $a \in P$ .

Dacă  $d \perp P$  ( $A = d \cap P$ ),  $AB \perp a$ ,  $B \in a$  și  $M \in d$ , atunci  $MB \perp a$ .

În adevăr, din ipoteza: 1)  $MA \perp a$  ( $MA \perp P$ ). 2)  $AB \perp a$ .

Dreapta  $a$  fiind perpendiculară pe două drepte concurente din planul  $AMB$ , este perpendiculară pe acest plan deci  $a \perp MB$  (fig. 68).

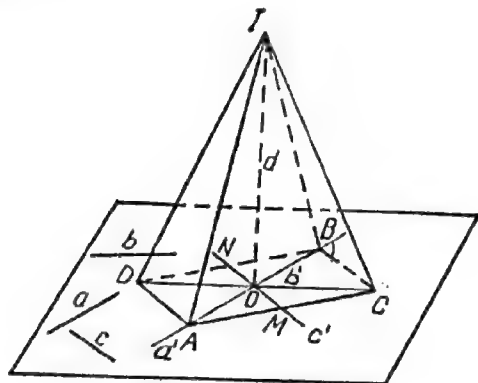


Fig. 67

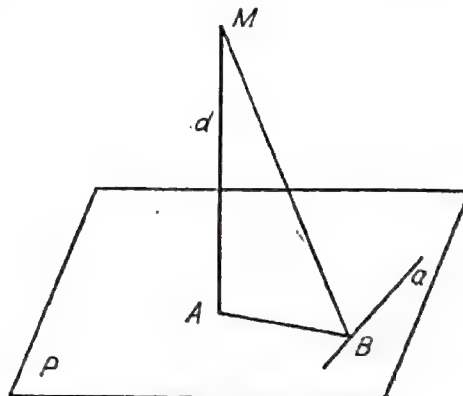


Fig. 68



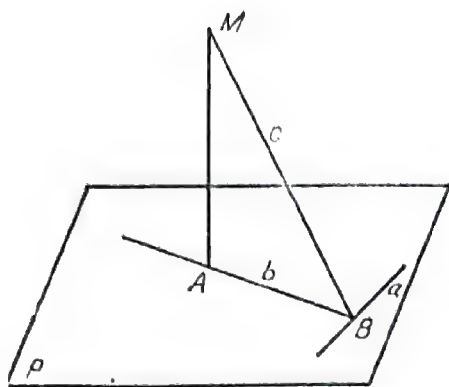


Fig. 69

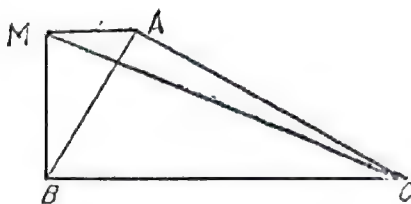


Fig. 70

**Reciproca teoremei celor trei perpendiculare.** Dacă dintr-un punct exterior unui plan  $P$  ducem perpendiculara pe plan și perpendiculara pe o dreaptă conținută în plan, atunci dreapta care unește picioarele acestor două perpendiculare este perpendiculară pe dreapta din plan.

Fie planul  $P$  și dreapta  $a \in P$ . Dacă  $MA \perp P$  și  $MB \perp a$ , atunci  $AB \perp a$ .

În adevăr, dreapta  $a$  fiind perpendiculară pe două drepte din planul  $AMB$  ( $MA \perp a$  și  $MB \perp a$ ), este perpendiculară pe planul  $AMB$ , deci  $a \perp AB$  ( $AB$  fiind conținută în planul  $AMB$  (fig. 68)).

### Aplicații

1) Fiind dat un plan  $P$  și o dreaptă  $a$  aparținând planului  $P$ , dacă dintr-un punct  $B$  al dreptei  $a$  ducem două perpendiculare pe dreapta  $a$ , una în plan ( $b$ ) și alta exterioară planului ( $c$ ) și dintr-un punct  $M$  al dreptei  $c$  ducem o perpendiculară  $MA$  pe perpendiculara  $b$  conținută în plan, atunci dreapta  $MA$  este perpendiculară pe plan (reciproca a II-a a teoremei celor trei perpendiculare).

Fie planul  $P$ , dreapta  $a \in P$  și  $B \in a$ .

Dacă din  $B$  ducem  $b \perp a$ ; ( $b \in P$ );  $c \perp a$ ; ( $c \notin P$ ); și  $MA \perp b$  ( $M \in c$ ) atunci  $MA \perp P$ .

$MA$  este perpendiculară pe plan dacă este perpendiculară pe două drepte din plan. Din ipoteză:  $MA \perp b$  ( $b \in P$ ). Dar avem și  $MA \perp a$  pentru că  $a$  este perpendiculară pe planul  $AMB$  ( $a \perp BA$ ,  $a \perp MB$ ) deci  $MA \perp P$  (fig. 69).

2) În vârful  $B$  al unui triunghi dreptunghic  $ABC$  ( $\hat{A} = 1 \text{ dr}$ ) se duce perpendiculara  $BM$  pe planul triunghiului. Să se dovedească că triunghiul  $MAC$  este dreptunghic.

Fie triunghiul  $ABC$  în planul  $P$  și  $BM \perp P$ . Vom avea relațiile:  $MB \perp P$ ,  $BA \perp AC$ . Rezultă conform teoremei celor trei perpendiculare că  $MA \perp AC$  deci  $\triangle MAC$  este dreptunghic în  $A$  (fig. 70).

3) În vârful  $A$  al unui dreptunghi  $ABCD$  se duce perpendiculara  $AM$  pe planul dreptunghiului. Să se demonstreze că unind punctul  $M$  cu vîrfurile dreptunghiului se obțin patru triunghiuri dreptunghice.

În adevăr,  $MA$  fiind perpendiculară pe planul  $ABCD$ , vom avea:  $MA \perp AB$  și  $MA \perp AD$  deci triunghiurile  $MAB$  și  $MAD$  sînt dreptunghice. Dar  $MB \perp BC$  ( $MA \perp$

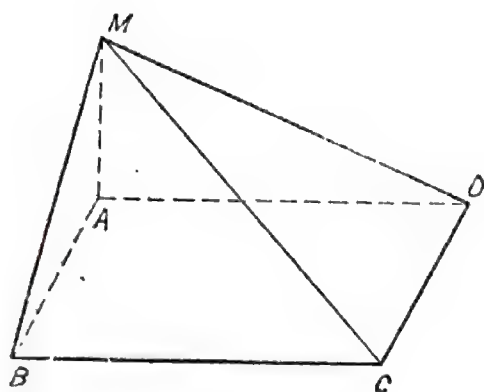


Fig. 71

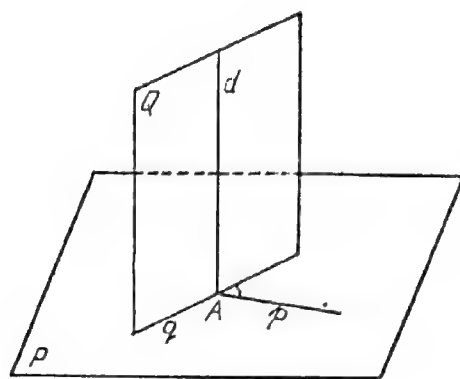


Fig. 72

$\perp ABCD$  și  $AB \perp BC$ ) și  $MD \perp DC$  ( $MA \perp ABCD$  și  $AD \perp DC$ ) deci și triunghiurile  $MDC$  și  $MBC$  sînt dreptunghice (fig. 71).

4) Dacă o dreaptă  $d$  este perpendiculară pe un plan  $P$ , atunci orice plan care trece prin  $d$  este perpendicular pe planul  $P$ .

Fie planul  $P$  și  $d \perp P$  notăm  $A = d \cap P$ . Prin  $d$  ducem un plan  $Q$  și notăm  $q = P \cap Q$ .

Cele două plane sînt perpendiculare dacă unghiul lor plan este unghi drept. Prin  $A$  ducem în  $P$  dreapta  $p \perp q$ . Unghiul format de dreptele  $d$  și  $p$ , concurente în  $A$ , este unghiul plan corespunzător diedrului. Dar  $d \perp p$  ( $d \perp P$  și  $p \in P$ ) (fig. 72) deci  $P \perp Q$ .

## V Triunghiul

Am văzut în capitolele precedente că într-un triunghi sau în două triunghiuri egale la laturi egale se opun unghiuri egale și reciproc la unghiuri egale se opun laturi egale. Dacă două laturi (unghiuri) ale unui triunghi sînt neegale, unghiurile (laturile) care li se opun sînt neegale. Relațiile între laturile și unghiurile unui triunghi sau a două triunghiuri egale sînt date de următoarea teoremă:

**Teorema I.** *Într-un triunghi sau în două triunghiuri egale dacă două laturi sînt neegale atunci la latura mai mare se opune unghiul mai mare și reciproc dacă două unghiuri sînt neegale la unghiul mai mare se opune latura mai mare.*

În adevăr, fie triunghiul  $ABC$  în care  $AB > AC$  (fig. 73). Pe  $AB$  luăm, pornind din  $A$ , segmentul  $AB' = AC$  ( $AC < AB$  deci  $B'$  va fi între  $A$  și  $B$ ). Unind  $B'$  cu  $C$  dreapta  $B'C$  împarte unghiul  $ABC$  în două unghiuri adiacente deci  $\widehat{ACB'} < \widehat{ACB}$  dar  $\widehat{ACB'} = \widehat{AB'C}$  (se opun în același triunghi la laturi egale) și  $\widehat{AB'C} > \widehat{ABC}$  ( $\widehat{AB'C}$  unghi exterior deci egal cu suma unghiurilor interioare neadiacente.  $\widehat{AB'C} = \widehat{ABC} + \widehat{B'CB}$ ) deci  $\widehat{ACB} > \widehat{B}$  căci o parte a lui ( $\widehat{ACB'}$ ) este mai mare decît  $\widehat{B}$ .

Reciproc, dacă  $\widehat{ACB} > \widehat{CBA}$  atunci  $AB > AC$ . În adevăr, dacă  $AB = AC$ , atunci  $\widehat{ACB} = \widehat{CBA}$ ; dacă  $AB < AC$ , atunci  $\widehat{ACB} < \widehat{CBA}$  ceea ce contrazice ipoteza. Rămîne  $AB > AC$ .

**Consecințe.** 1) *Într-un triunghi dreptunghic, ipotenuza este mai mare decît o catetă.*

2) *Latura care se opune unui unghi obtuz este mai mare decît fiecare din celelalte două laturi ale triunghiului (fig. 74).*

### Neegalități între laturile unui triunghi

**Teoremă.** *Orice latură într-un triunghi este mai mică decît suma celorlalte două și mai mare decît modulul diferenței lor.*

În adevăr, fie un triunghi  $ABC$ . Orice latură este segmentul care unește două puncte deci este mai mică

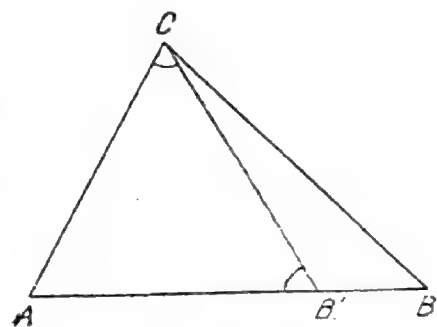


Fig. 73

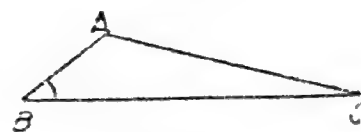


Fig. 74

decît orice alt drum dintre cele două puncte, în particular decît suma celorlalte două laturi:

$$AB < BC + AC; BC < CA + BA; CA < AB + CB.$$

Din prima și a treia relație obținem

$$BC > AB - AC \quad \text{și} \quad BC > CA - AB;$$

rezultă  $BC > |AB - AC|$ .

Analog,  $CA > |BC - BA|$  și  $AB > |CA - CB|$ .

## Linii importante în triunghi

1) *Mediana* este segmentul care unește un vîrf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse. Un triunghi are deci trei mediane.

**Teoremă.** *Medianele unui triunghi sînt concurente într-un punct  $G$  care se găsește pe fiecare mediană la  $\frac{1}{3}$  de bază.*

În adevăr, fie triunghiul  $ABC$  (fig. 75) în care considerăm două mediane  $AA'$  și  $BB'$ ; ele se întîlnesc într-un punct  $G$ .

Notăm cu  $D$  și  $E$  mijloacele segmentelor  $AG$  și  $BG$ . Avem relațiile:

1)  $A'B' \parallel AB$  și  $A'B' = \frac{AB}{2}$  ( $A'B'$  linie mijlocie în triunghiul  $ABC$ ).

2)  $DE \parallel AB$  și  $DE = \frac{AB}{2}$  ( $DE$  linie mijlocie în triunghiul  $ABG$ ).

Pe baza tranzitivității paralelismului și a egalității avem și:

$A'B' \parallel DE$  și  $A'B' = DE$ . Rezultă că patrulaterul

$A'B'DE$  este paralelogram și avem relațiile  $DG = GA'$  și  $GE = GB'$  (proprietatea diagonalelor). Deci:  $\frac{GA'}{GA} = \frac{GB'}{GB} = \frac{1}{2}$  căci din construcție  $DG = AD$  și  $GE = EB$ . A treia mediană trece și ea prin  $G$ .

2) *O mediatoare* a unui triunghi este mediatoarea segmentului determinat de două vîrfuri ale triunghiului.

*Într-un triunghi mediatoarele sînt concurente într-un punct  $O$ .*

Fie  $ABC$  un triunghi (fig. 76) în care ducem mediatoarele laturilor  $AB$  și  $AC$ . Ele se întîlnesc într-un punct  $O$  dar, din proprietatea punctelor mediatoarei unui segment,  $AO = OB$  ( $O$  pe mediatoarea segmentului  $AB$ ) și  $OA = OC$  ( $O$  pe mediatoarea

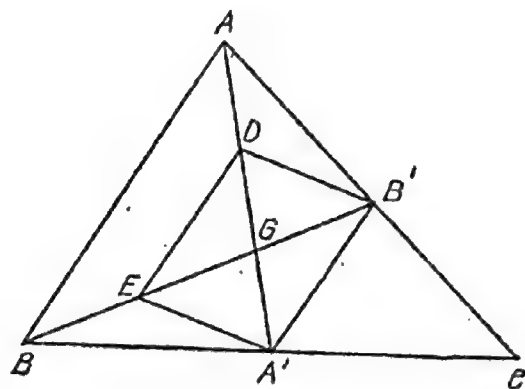


Fig. 75

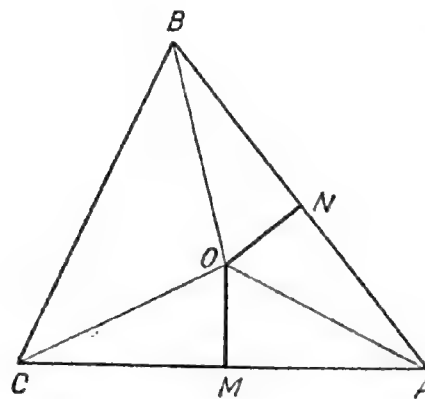


Fig. 76



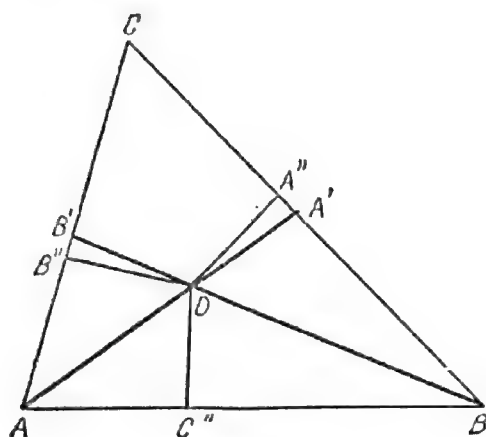


Fig. 77

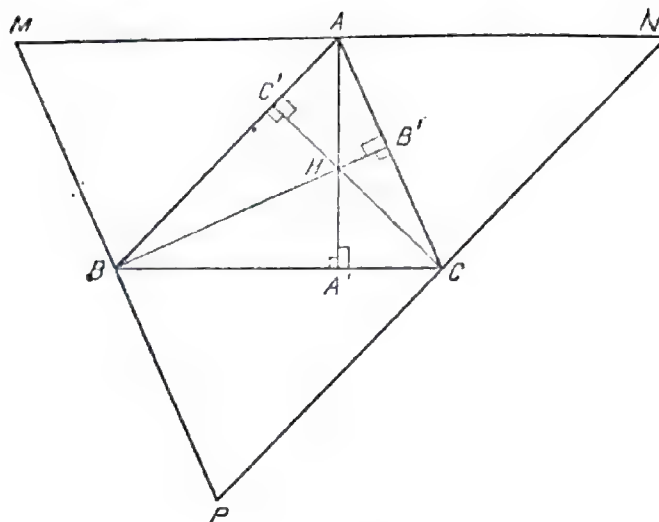


Fig. 78

segmentului  $AC$ ) de unde  $BO = OC$ . Deci  $O$  se găsește și pe mediatoarea laturii  $BC$  fiind egal depărtat de punctele  $B$  și  $C$ .

3) *Bisectoarele unghiurilor interioare ale unui triunghi sînt concurente.*

Fie triunghiul  $ABC$  și bisectoarele  $AA'$  și  $BB'$  care se întîlnesc într-un punct  $D$  (fig. 77). Din  $D$  ducem distanțele la laturi,  $DC''$ ,  $DA''$ ,  $DB''$ .

Pe baza proprietății punctelor de pe bisectoare avem:

1)  $DC'' = DB''$  ( $D$  se află pe bisectoarea unghiului  $A$ ),

2)  $DC'' = DA''$  ( $D$  se află pe bisectoarea unghiului  $B$ ).

Rezultă  $DB'' = DA''$  deci  $D$  se află și pe bisectoarea unghiului  $C$ .

4) *Înălțimile unui triunghi sînt perpendicularele duse din vîrfurile triunghiului pe laturile opuse.*

*Înălțimile într-un triunghi sînt concurente într-un punct  $H$ .*

Fie  $ABC$  un triunghi și  $AA' \perp BC$ ,  $BB' \perp AC$ ,  $CC' \perp AB$ . Pentru a dovedi că  $AA'$ ,  $BB'$  și  $CC'$  sînt concurente vom dovedi că ele sînt mediatoarele unui triunghi, format ducînd prin vîrfurile triunghiului paralele la laturile opuse. Aceste paralele se întîlnesc două cîte două în punctele  $M$ ,  $N$ ,  $P$  (fig. 78).

Astfel:  $MN \parallel BC$ ,  $NP \parallel AB$ ,  $PM \parallel AC$ . Vom avea relațiile:

1)  $BC \parallel AN$  și  $BC = AN$  ( $ANCB$  paralelogram),

2)  $BC \parallel AM$  și  $BC = AM$  ( $AMBC$  paralelogram).

Rezultă:  $AM = AN$  și  $AA' \perp MN$  ( $AA'$  fiind perpendiculară pe  $BC$ , este perpendiculară și pe  $MN$ , paralelă la  $BC$ ). Orice înălțime a triunghiului  $ABC$  este mediatoare în triunghiul  $MNP$ . Dar mediatoarele laturilor unui triunghi sînt concurente. Deci și înălțimile  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  sînt concurente.

*Consecințe.* 1) Într-un triunghi dreptunghic două din înălțimi sînt cele două catete perpendiculare una pe alta; punctul  $H$  se confundă cu vîrfurile unghiului drept (fig. 79).

2) Înălțimea dusă dintr-un vîrf pe latura opusă va avea piciorul pe latură (între celelalte două vîrfuri ale triunghiului) dacă aceasta este latura unui unghi ascuțit și pe prelungirea laturii dacă este latura unui unghi obtuz.

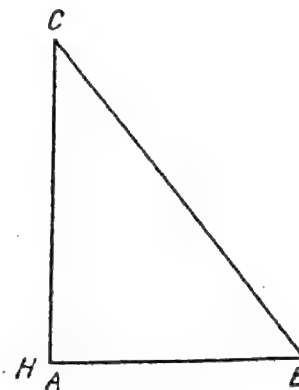


Fig. 79

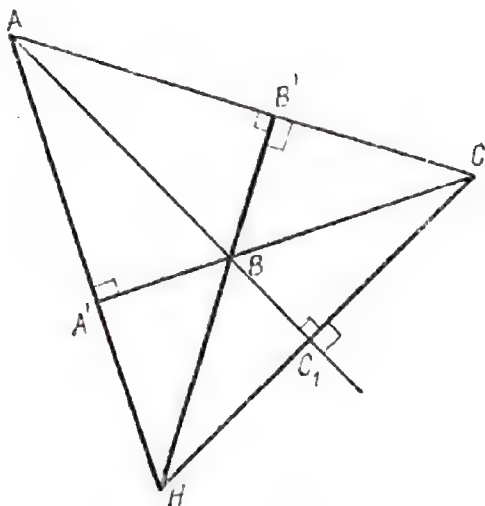


Fig. 80

Punctul  $H$  este interior triunghiului dacă toate unghiurile lui sînt ascuțite, este un vîrf al triunghiului dacă triunghiul este dreptunghic, este în afara triunghiului dacă triunghiul are un unghi obtuz (fig. 80).

3) Într-un triunghi isoscel, mediana, bisectoarea și înălțimea duse din vîrfurile comun laturilor egale se confundă.

În adevăr, am văzut că bisectoarea unghiului format de laturile egale este și mediatoarea laturii opuse deci ea este și mediană căci trece prin mijlocul laturii opuse. Este și înălțime căci este perpendiculară pe latura opusă.

### Aplicații

1) Un triunghi echilateral  $ABC$  este așezat cu vîrfurile  $A$  într-un plan  $P$  astfel ca laturile  $AB$  și  $AC$  să formeze cu planul  $P$  unghiuri de  $45^\circ$ . Să se demonstreze că latura  $BC$  este paralelă cu planul  $P$  și că proiecția triunghiului  $ABC$  pe planul  $P$  este un triunghi dreptunghic.

Fie triunghiul echilateral  $ABC$ , planul  $P$  și  $A \in P$  (fig. 81). Proiecțiile punctelor  $B$  și  $C$  pe plan sînt  $B'$  și  $C'$ .

$\triangle ACC'A$  și  $\triangle ABB'A$  sînt dreptunghice, isoscele ( $CC' \perp C'A$ ,  $\widehat{CAC'} = 45^\circ$ ,  $BB' \perp AB'$ ,  $\widehat{BAB'} = 45^\circ$ ) egale ( $AC = AB$  din ipoteză,  $\widehat{C'AC} = \widehat{BAB'} = 45^\circ$ ). Rezultă  $CC' = BB'$ . Patrulaterul  $CBB'C'$  este paralelogram ( $CC' \parallel BB'$ ) deci  $BC \parallel B'C'$ . Așadar  $BC \parallel P$ .

Triunghiul  $ABC$  se proiectează după triunghiul  $AB'C'$  egal cu  $ACC'$  ( $C'B' = BC = AC$ ,  $AC' = AC'$  (comun),  $AB' = BB' = CC'$ ) deci

$$\widehat{C'AB'} = \widehat{CC'A} = 1 \text{ dr.}$$

2) Să se demonstreze că suma distanțelor unui punct de pe baza unui triunghi isoscel, la laturile egale ale triunghiului este constantă (egală cu înălțimea triunghiului relativă la una din laturile egale).

Fie triunghiul isoscel  $ABC$  și un punct  $M \in BC$  (fig. 82)  $MB' \perp AC$ ;  $MC' \perp AB$ ; ducem înălțimea  $CC_1$  și prin  $M$ ,  $MD \parallel AB$  ( $D \in CC_1$ ).

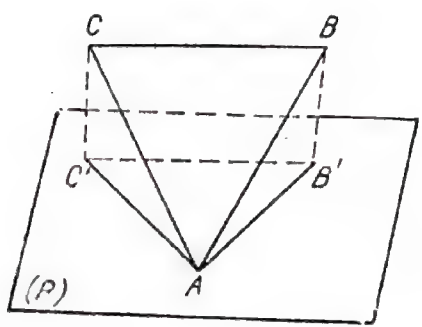


Fig. 81

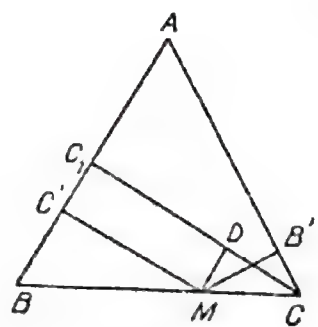


Fig. 82

Patrulaterul  $C_1C'MD$  este paralelogram deci  $DC_1 = MC'$ . Trebuie să demonstrăm că  $CD = MB'$ . Dar  $\triangle CDM = \triangle CMB'$  pentru că:

- 1)  $\hat{B}' = \hat{D} = 1$  dr ( $MB' \perp AC$ ,  $MD \parallel AB$  și  $AB \perp CC_1$ ),
- 2)  $MC = MC$  (latură comună),
- 3)  $\widehat{B'CM} = \widehat{DMC}$  ( $\widehat{DMC} = \hat{B}$  corespondente  $MD \parallel AB$  tăiate de  $CB$  și  $\hat{B} = \hat{C}$  din ipoteză).

Rezultă  $MB' = CD$  (se opun în triunghiuri egale la unghiuri egale).

$$CC_1 = CD + DC_1, \quad CC_1 = MB' + MC'.$$

**Teorema lui Tales.** Dacă ducem într-un triunghi o paralelă la o latură a triunghiului, atunci ea determină pe celelalte două laturi segmente proporționale.

Fie triunghiul  $ABC$  (fig. 83). Dacă  $DE \parallel BC$  atunci:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}. \text{ Nu dăm demonstrația acestei teoreme.}$$

Din  $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$  se obțin proporțiile derivate:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \text{ sau } \frac{BD}{AB} = \frac{EC}{AC}$$

care exprimă alte forme ale teoremei lui Tales.

**Reciproca teoremei lui Tales**

Dacă o dreaptă împarte două laturi ale unui triunghi în același raport, atunci dreapta este paralelă cu a treia latură a triunghiului.

Fie triunghiul  $ABC$  și punctele  $D, E$  ( $D \in AB, E \in AC$ ) astfel încât  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ , trebuie să demonstrăm că  $DE \parallel BC$  (fig. 84). Dacă  $DE$  nu e paralelă cu  $BC$ , ducem prin  $D$  o dreaptă  $DE' \parallel BC$ . Conform teoremei directe  $\frac{AE'}{E'C} = \frac{AD}{DB}$ . Dar din ipoteză  $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ .

Deci  $\frac{AE'}{E'C} = \frac{AE}{EC}$  posibil numai dacă  $E$  coincide cu  $E'$ , așadar  $DE \parallel BC$ .

### Poligoane asemenea

Numim poligoane asemenea poligoanele care au unghiurile respectiv egale două câte două și laturile omologe, proporționale. Raportul a două laturi omologe se numește raport de asemănare. Semnul de asemănare este  $\sim$ .

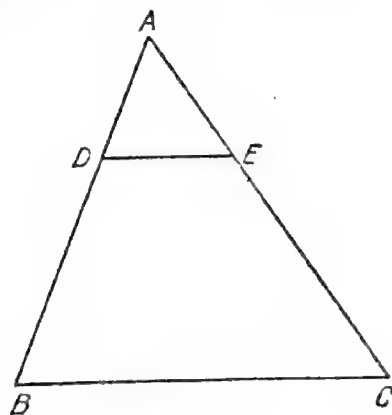


Fig. 83

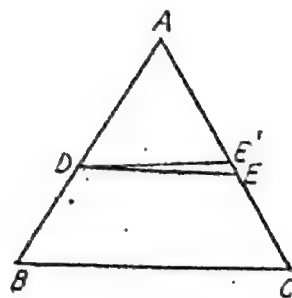


Fig. 84

În cazul triunghiurilor, condițiile suficiente ca două triunghiuri să fie asemenea sînt date de teoreme numite și cazurile de asemănare. Demonstrarea acestor cazuri de asemănare a triunghiurilor se bazează pe *teorema fundamentală a asemănării*:

*O paralelă la o latură a unui triunghi formează cu celelalte două laturi ale triunghiului un triunghi asemenea cu cel dat.*

Dacă în  $\triangle ABC$ ,  $DE \parallel BC$  atunci  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ .

În adevăr, ducînd  $DE \parallel BC$  avem: a)  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$  (o formă a teoremei lui Tales). Prin  $D$  ducem  $DF \parallel AC$  (fig. 85) avem:

$$b) \frac{FC}{CB} = \frac{AD}{AB}. \text{ Dar}$$

$$c) FC = DE \text{ (laturi opuse în paralelogram).}$$

Din (a), (b) și (c) deducem relațiile între laturile triunghiurilor:

$$1) \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{CB}.$$

Cele două triunghiuri au și unghiurile corespunzătoare egale.

2)  $\hat{A} = \hat{A}$  (comun);  $\hat{D} = \hat{B}$  și  $\hat{E} = \hat{C}$  (unghiuri corespondente formate de  $DE \parallel BC$  tăiate de  $AB$  și  $AC$ ).

Relațiile 1) și 2) demonstrează că  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ .

Pentru a demonstra mai departe cazurile de asemănare a triunghiurilor vom folosi un triunghi auxiliar asemenea cu unul din triunghiurile date și egal cu celălalt.

*Cazul I. Dacă două triunghiuri au două unghiuri respectiv egale, atunci ele sînt asemenea.*

Fie triunghiurile  $ABC$  și  $A_1B_1C_1$  care au

$$\hat{A} = \hat{A}_1; \hat{B} = \hat{B}_1. \text{ Trebuie să demonstrăm că}$$

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC.$$

$$\text{Avem } \hat{C} = \hat{C}_1 = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (\hat{A}_1 + \hat{B}_1).$$

Pentru a demonstra proporționalitatea laturilor luăm pe  $AB$  un segment  $AB' = A_1B_1$ ; prin  $B'$  ducem  $B'C' \parallel BC$  (fig. 86). Pe baza teoremei fundamentale a asemănării  $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$ .  $\triangle AB'C' = \triangle A_1B_1C_1$  pentru că  $AB' = A_1B_1$  din construcție:  $\hat{A} = \hat{A}'$  din ipoteză,  $\hat{B}' = \hat{B}_1$  ( $\hat{B}' = \hat{B}$  corespondente  $B'C' \parallel BC$  tăiate de  $AB$  iar  $\hat{B} = \hat{B}_1$  din ipoteză). Rezultă:

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC.$$

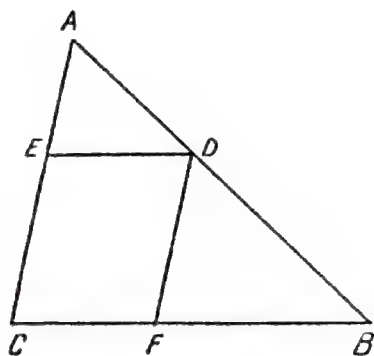


Fig. 85

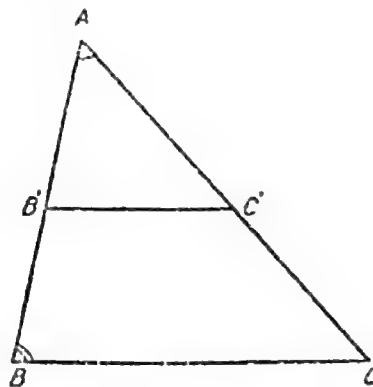
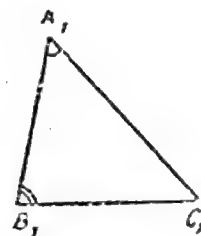


Fig. 86





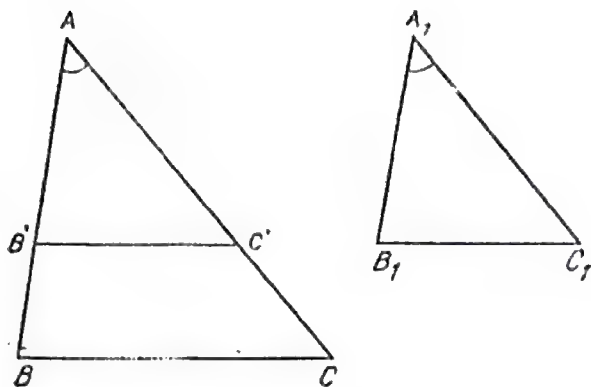


Fig. 87

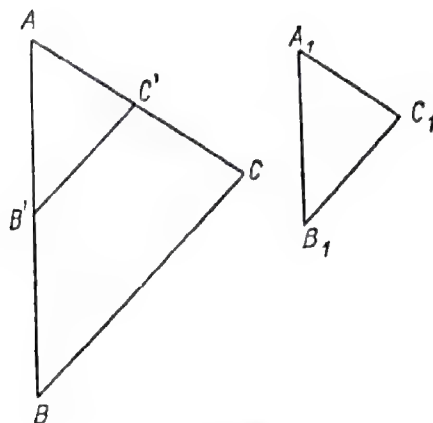


Fig. 88

**Cazul II.** Dacă două triunghiuri au câte un unghi egal cuprins între laturi proporționale, atunci ele sînt asemenea.

Fie triunghiurile  $ABC$  și  $A_1B_1C_1$  astfel ca  $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$  și  $\hat{A} = \hat{A}_1$ . Trebuie să demonstrăm că  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

Luăm pe  $AB$  segmentul  $AB' = A_1B_1$ . Prin  $B'$  ducem  $B'C' \parallel BC$  (fig. 87).  $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$ . Dar  $\triangle AB'C' = \triangle A_1B_1C_1$  pentru că:

$AB' = A_1B_1$  din construcție;  $\hat{A} = \hat{A}_1$  (ipoteză)

$A_1C_1 = AC'$  (ducînd  $B'C' \parallel BC$   $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$  dar  $AB' = A_1B_1$  și  $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$  deci  $\frac{AC'}{AC} = \frac{A_1C_1}{AC}$ ). Rezultă  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

**Cazul III.** Dacă două triunghiuri au laturile proporționale, atunci ele sînt asemenea.

Fie triunghiurile  $ABC$  și  $A_1B_1C_1$ , astfel ca  $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}$ . Trebuie să demonstrăm că  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

Luăm pe  $AB$  segmentul  $AB' = A_1B_1$  și ducem prin  $B'$  dreapta  $B'C' \parallel BC$  (fig. 88). Rezultă  $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$  deci (1)  $\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A}{CA}$ . Dar  $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AB'C'$  pentru că:

1°  $AB' = A_1B_1$  din construcție, din ipoteză și din relațiile (1) deducem:  $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A}{CA}$

de unde 2°)  $B_1C_1 = B'C'$  și 3°)  $C_1A_1 = C'A$  rezultă

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC.$$

**Consecințe.** 1) Dacă două triunghiuri dreptunghice au câte un unghi ascuțit egal, ele sînt asemenea.

2) Dacă două triunghiuri dreptunghice au catetele proporționale, ele sînt asemenea.

3) Triunghiurile isoscele  $ABC$  și  $A'B'C'$  ( $A$  și  $A'$  fiind vîrfurile formate de laturile egale) sînt asemenea dacă au a)  $\hat{A} = \hat{A}'$  sau b)  $\hat{B} = \hat{B}'$ .

4) Toate poligoanele regulate (poligon regulat este poligonul care are laturile egale și unghiurile egale) cu același număr de laturi sînt asemenea.

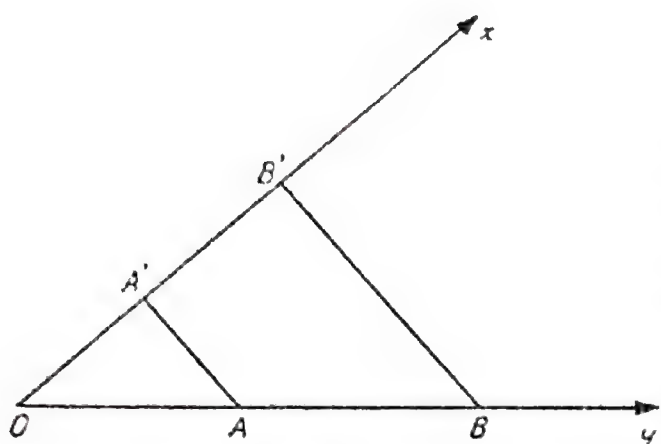


Fig. 89

În adevăr dacă poligoanele au  $n$  vârfuri, fiecare unghi va fi egal cu:  $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$  iar raportul de asemănare va fi raportul format de o latură a unui poligon și o latură a celuilalt.

### Rapoarte trigonometrice

Fie un unghi ascuțit  $\widehat{xOy} = \alpha$ . Ducând din două puncte oarecare ale semidreptei  $Oy$  perpendicularele pe  $Ox$ , se obțin două triunghiuri asemenea; raportul a două laturi ale unui triunghi

este egal cu raportul laturilor omologe din celălalt triunghi.

În adevăr, fie punctele  $A, B \in Oy$  și  $AA' \perp Ox$ ,  $BB' \perp Ox$  (fig. 89) atunci  $AA' \parallel BB'$  deci:

$$\triangle OAA' \sim \triangle OBB'.$$

$$1) \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}. \text{ Din (1) rezultă}$$

1°  $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$  deci raportul dintre cateta alăturată unui unghi dat și ipotenuză este constant indiferent de măsura acestor segmente. Acest raport constant îl numim *cosinusul* unghiului  $\alpha$  și-l notăm  $\cos \alpha$ .

2°  $\frac{AA'}{OA} = \frac{BB'}{OB}$ , deci raportul dintre cateta opusă unghiului  $\alpha$  și ipotenuză este constant; îl numim *sinusul* de  $\alpha$  și-l notăm  $\sin \alpha$ .

3°  $\frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'}$ , deci raportul dintre cateta opusă unghiului  $\alpha$  și cateta alăturată este constant, îl numim *tangenta* de  $\alpha$  și-l notăm  $\tan \alpha$ .

4°  $\frac{OA'}{AA'} = \frac{OB'}{BB'}$ , deci raportul dintre cateta alăturată unghiului  $\alpha$  și cateta opusă este constant; îl numim *cotangenta* de  $\alpha$  și-l notăm  $\cotg \alpha$ .

În triunghiul  $ABC$ , dreptunghic în  $A$ , vom avea rapoartele:

$$1) \frac{AB}{CB} = \sin \hat{C} = \cos \hat{B}; \quad \frac{AC}{CB} = \sin \hat{B} = \cos \hat{C};$$

$$2) \frac{AB}{AC} = \tan \hat{C} = \cotg \hat{B}; \quad \frac{AC}{AB} = \tan \hat{B} = \cotg \hat{C}.$$

Din relațiile 1 și 2 rezultă:

1) O catetă este egală cu ipotenuza înmulțită cu sinusul unghiului opus acestei catete sau cu cosinusul unghiului alăturat acestei catete:  $AB = CB \sin \hat{C} = CB \cos \hat{B}$ .

2) Ipotenuza este egală cu raportul dintre o catetă și sinusul unghiului opus acestei catete sau cu raportul dintre o catetă și cosinusul unghiului alăturat catetei.

*Observații.* Cum raportul dintre o catetă și ipotenuză este totdeauna subunitar, sinusul și cosinusul unui unghi al triunghiului sînt subunitare.

## Rezolvarea triunghiului dreptunghic

A rezolva un triunghi dreptunghic cînd se dau anumite elemente (2 elemente diferite de unghiul drept) înseamnă a găsi valorile tuturor elementelor triunghiului.

Exemple. Să se rezolve triunghiul dreptunghic  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) cînd se cunosc:

a)  $AB = 3$  m,  $AC = 4$  m, b)  $AB = 3$  m,  $CB = 5$  m,

c)  $AB = 3$  m,  $\hat{B} = 53^\circ 30'$ , d)  $BC = 5$  m,  $\hat{B} = 37^\circ$ .

a) Cunoșcînd cele două catete, putem afla unghiurile prin tangentă sau cotangentă

$$\frac{AB}{AC} = \operatorname{tg} \hat{C} = \operatorname{ctg} \hat{B}; \quad \frac{3}{4} = 0,75 = \operatorname{tg} C = \operatorname{ctg} B.$$

În tabelul de la sfîrșitul manualului școlar găsim:

$0,740 = \operatorname{tg} 36^\circ 30'$  și  $0,754 = \operatorname{tg} 37^\circ$ . Putem lua pentru  $\hat{C}$  unghiul  $37^\circ$  (cu aproximație prin adaos).

Unghiul  $\hat{B}$  se poate afla fie din tabel fie calculînd complementul unghiului de  $37^\circ$ :

$$\hat{B} = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ.$$

Pentru a calcula ipotenuza luăm:

$$BC = \frac{AB}{\sin \hat{C}}, \quad BC = \frac{3}{\sin 37^\circ}, \quad BC = \frac{3}{0,602} = \frac{3000}{602} = \frac{1500}{301} \approx 5 \text{ m.}$$

b)  $AB = 3$  m,  $CB = 5$  m.

Calculăm unghiurile:

$$\sin \hat{C} = \cos \hat{B} = \frac{3}{5} = 0,6. \text{ Căutăm în tabele unghiurile corespunzătoare și găsim:}$$

$$0,602 = \sin 37^\circ, \quad 0,602 = \cos 53^\circ, \text{ deci } \hat{C} \approx 37^\circ, \quad \hat{B} \approx 53^\circ.$$

Calculăm cateta  $AC$ .

$$AC = CB \cos \hat{C}, \quad AC = 5 \cos 37^\circ \approx 5 \cdot 0,799 \approx 3,995, \quad AC \approx 4 \text{ m.}$$

c)  $AB = 3$  m,  $\hat{B} = 53^\circ 30'$ .

Calculăm unghiul  $C$ .

$$\hat{C} = 90^\circ - 53^\circ 30' = 36^\circ 30'.$$

Calculăm laturile

$$AC = AB \operatorname{tg} \hat{B}, \quad AC = 3 \operatorname{tg} 53^\circ 30' \approx 3 \cdot 1,351 = 4,053, \quad AC \approx 4 \text{ m.}$$

$$BC = \frac{AB}{\sin C}, \quad BC = \frac{3}{\sin 36^\circ 30'}, \quad BC \approx \frac{3}{0,595} = \frac{3000}{595}, \quad BC \approx 5 \text{ m.}$$

d)  $BC = 5$  m,  $\hat{B} = 37^\circ$ .

$\hat{C} = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$ . Calculăm laturile:

$$AB = CB \cos \hat{B}, \quad AC = CB \sin \hat{B},$$

$$AC = 5 \cos 37^\circ \approx 5 \cdot 0,799 \approx 4 \text{ m,}$$

$$AB = 5 \sin 37^\circ \approx 5 \cdot 0,602 \approx 3 \text{ m.}$$

## Aplicații

1) Raportul perimetrelor a două poligoane asemenea este egal cu raportul a două laturi omologe (raportul de asemănare).

Dacă poligonul  $ABCD...L$  este asemenea cu poligonul  $A'B'C'D'...L'$ . Vom avea (aplicând proprietatea șirului de rapoarte egale):

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \dots = \frac{KL}{K'L'} = \frac{AB + BC + CD + \dots + KL}{A'B' + B'C' + C'D' + \dots + K'L'} = \frac{p}{p'}$$

unde am notat cu  $2p$  și  $2p'$  perimetrele celor două poligoane.

2) Într-un trapez punctul de intersecție a diagonalelor:

a) este vârful a două triunghiuri asemenea care au laturile opuse acestui vârf bazele trapezului;

b) împarte paralela dusă prin el la bază în două segmente egale.

Fie trapezul  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) cu diagonalele  $AC$  și  $BD$  concurente în  $I$  (fig. 90).

1)  $\triangle ABI \sim \triangle CDI$  ( $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$  opuse la vârf,  $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$  alterne interne).

2) Paralela prin  $I$  la  $AB$  taie laturile  $AD$ ,  $BC$  respectiv în  $E$  și  $F$ . În triunghiul  $ABD$ ,  $EI \parallel AB$  deci:

$$1) \frac{EI}{AB} = \frac{DI}{DB}.$$

În triunghiul  $ABC$ ,  $IF \parallel AB$  deci:

$$2) \frac{IF}{AB} = \frac{CI}{CA}.$$

Dar din asemănarea triunghiurilor  $ABI$  și  $CDI$  avem:

$$\frac{IC}{IA} = \frac{ID}{IB} \text{ formînd o proporție derivată:}$$

$$3) \frac{IC}{AC} = \frac{ID}{DB}.$$

Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă  $\frac{EI}{AB} = \frac{IF}{AB}$ , deci  $EI = IF$ .

3) Fiind dat un trapez  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) cu baza mare  $CD$ , dacă prelungim laturile  $DA$ ,  $CB$ , ele se întîlnesc într-un punct  $E$ . Să se arate că mediana din  $E$  a triunghiului  $DEC$  taie orice paralelă la bază în două părți egale. Să se facă legătura cu problema precedentă.

În triunghiul  $DEC$  ducem mediana  $EM$  și o paralelă la  $DC$  care taie pe  $AD$ ,  $EM$ , și  $BC$  respectiv în  $F$ ,  $G$  și  $H$  (fig. 91).

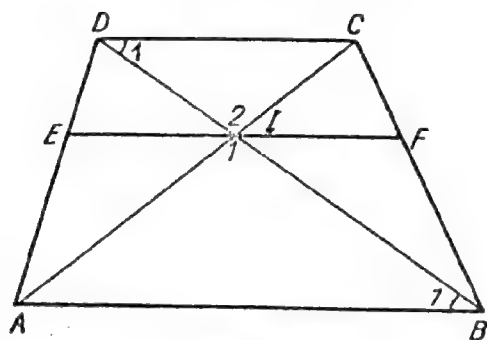


Fig. 90

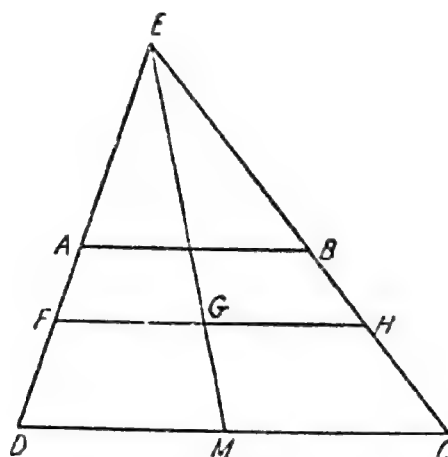


Fig. 91



Pe baza teoremei fundamentale a asemănării:

1)  $\frac{FG}{DM} = \frac{EG}{EM}$  și 2)  $\frac{GH}{MC} = \frac{EG}{EM}$  din (1) și (2) ținând seama că  $DM = MC$  obținem:

$FG = GH$ . Cum paralela la  $BC$  am dus-o printr-un punct oarecare al mediane  $EM$ , înseamnă că toate punctele ei se bucură de această proprietate. Rezultă, ținând seama și de aplicația 2) că: mediana triunghiului obținut prin prelungirea laturilor unui trapez relativă la o bază a trapezului trece prin punctul de intersecție a diagonalelor trapezului.

4) Pe ipotenuza  $BC$  a unui triunghi dreptunghic  $ABC$  se consideră un punct oarecare  $M$ . Simetricele punctului  $M$  față de  $AB$  și  $AC$  sînt respectiv  $N$  și  $P$ . Se notează cu  $D$  intersecția dreptelor  $AB$  și  $MN$ , iar cu  $E$  intersecția dreptelor  $AC$  și  $MP$ . Să se arate că:

- triunghiurile  $MAN$  și  $MAP$  sînt isoscele;
- punctele  $N$ ,  $A$  și  $P$  sînt coliniare;
- triunghiurile  $ADN$  și  $AEP$  sînt egale.

(Concurs de matematică cl. a VI-a, etapa locală, București 1969).

a) Triunghiurile  $MAN$  și  $MAP$  au din construcție medianele  $AD$ ,  $AE$  și înălțimi deci sînt triunghiuri isoscele (fig. 92). Se mai poate afirma că cele două triunghiuri, avînd  $AD$  respectiv  $AE$  axe de simetrie, sînt isoscele.

b) Vom dovedi că  $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 1$  dr. Atunci  $NA$  și  $AP$  sînt în prelungire căci formează un unghi egal cu 2 dr.

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_3 \text{ și } \hat{A}_4 = \hat{A}_2. \text{ Dar } \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = 1 \text{ dr. } \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 1 \text{ dr.}$$

$$\widehat{NAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAP} = 2 \text{ dr deci } AN, AP \text{ sînt în prelungire.}$$

c)  $\triangle AND = \triangle APE$  căci sînt triunghiuri dreptunghice care au

$$1) \hat{A}_1 = \hat{APE} \text{ (avînd același complement } \hat{A}_2).$$

Triunghiurile  $NAM$  și  $MAP$  fiind isoscele cu vîrfurile în  $A$ , avem:

$$AN = AM \text{ și } AM = AP \text{ deci}$$

$$2) AN = AP$$

Cele două triunghiuri au ipotenuzele egale și cîte un unghi ascuțit egal deci sînt egale.

5) În triunghiul isoscel  $ABC$  ( $AB = AC$ ), înălțimile  $AD$  și  $BE$  se intersectează în punctul  $H$ . Știînd că  $AD = BC = a$ , să se arate că:

- Triunghiurile  $ADC$  și  $BDH$  sînt asemenea
- $AH = 3 HD$ ; 3)  $AB + AE = 2 BE$ .

(Concurs de matematică cl. a VII-a, etapa locală, București, 1969).

1) În triunghiul  $ABC$  ( $AD \perp BC$  și  $BE \perp AC$ ) avem  $AD = BC = a$  și  $AB = AC$ . (fig. 93).

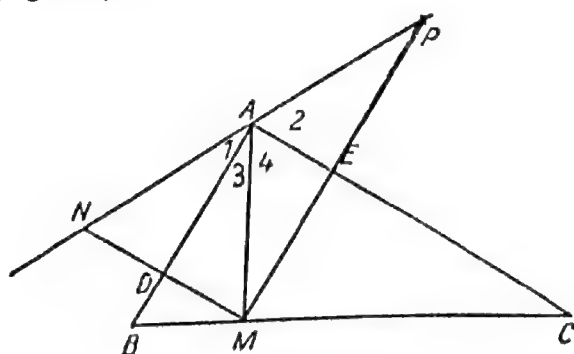


Fig. 92

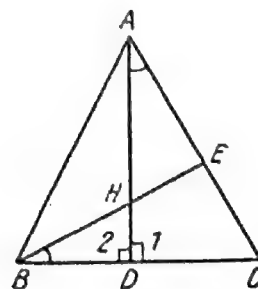


Fig. 93

$\triangle ADC \sim \triangle BDH$ :  $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 1$  dr,  $\widehat{DAC} = \widehat{DBH}$  (au același complement, unghiul  $\hat{C}$ ).

Triunghiurile fiind dreptunghice, avînd cîte un unghi ascuțit egal, sînt asemenea.

2)  $\triangle AHE \sim \triangle ADC$  (triunghiuri dreptunghice cu  $\widehat{DAC}$  comun).

Rezultă:  $\frac{AH}{AC} = \frac{HE}{DC} = \frac{AE}{AD}$  Dar  $DC = \frac{a}{2}$ ;  $AD = a$  și  $AC = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

deci  $\frac{AH}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{HE}{\frac{a}{2}} = \frac{AE}{a}$  Din ultimele două rapoarte obținem  $AE = 2HE$ .

Dar  $\triangle BHD \sim \triangle AHE$  (din 1 și 2). Rezultă

$$\frac{HD}{HE} = \frac{BD}{AE} \text{ sau } \frac{HD}{HE} = \frac{\frac{a}{2}}{2HE}; HD = \frac{a}{4}.$$

Dacă  $HD = \frac{a}{4}$ , avem  $AH = a - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$  și  $\frac{AH}{HD} = \frac{3a}{4} \cdot \frac{4}{a} = 3$ .

3)  $AB = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ ;  $AE = \frac{AD \cdot AH}{AC}$  (2)

deci:

$$AE = \frac{\frac{a \cdot \frac{3a}{4}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{3a}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}a}{2 \cdot 5} \text{ și } BE = \frac{BC \cdot AD}{AC} = \frac{a^2}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

$$AB + AE = \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{5}a}{2 \cdot 5} \text{ și } 2BE = \frac{4a\sqrt{5}}{5} \text{ deci } AB + AE = 2BE.$$

**Observare.** Relația  $BE = \frac{BC \cdot AD}{AC}$  exprimă că într-un triunghi produsul dintre o latură și înălțimea corespunzătoare este constant (este egal cu dublul ariei triunghiului). Ea poate fi dedusă și din asemănarea triunghiurilor  $BEC$  și  $ADC$  ( $\frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC}$ ).

### Relații metrice într-un triunghi dreptunghic

1) **Teorema catetei.** O catetă este medie proporțională între ipotenuză și proiecția ei pe ipotenuză:

$$AB^2 = BC \cdot BD, \quad AC^2 = BC \cdot DC.$$

2) **Teorema înălțimii.** Înălțimea relativă la ipotenuză este medie proporțională între segmentele determinate de ea pe ipotenuză:

$$AD^2 = BD \cdot DC.$$

3) **Teorema lui Pitagora.** Pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

1) Pentru demonstrarea primei teoreme observăm că segmentele  $AB$ ,  $BC$  fac parte din triunghiul  $ABC$  iar  $AB$ ,  $BD$  din triunghiul  $ABD$  (fig. 94).

$\triangle ABC \sim \triangle ABD$  ( $\widehat{B}$  comun și  $\widehat{C} = \widehat{BAD}$  având același complement,  $\widehat{DAC}$ .)

Rezultă:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC}.$$

Relația  $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$  exprimă concluzia din teorema catetei. Analog relația  $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$ .

*Observație.* Relația  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{AC}$  este foarte utilă în aplicații, ea exprimă că: într-un triunghi dreptunghic produsul dintre ipotenuză și înălțimea corespunzătoare este egal cu produsul catetelor.

2) Segmentele  $AD$ ,  $BD$  și  $AD$ ,  $DC$  fac parte din triunghiurile asemenea  $ABD$  și  $ADC$ .

$\triangle ABD \sim \triangle ADC$  ( $\widehat{BAD} = \widehat{C}$ ;  $\widehat{B} = \widehat{DAC}$  având același complement).

Rezultă relația:  $\frac{AD}{CD} = \frac{DB}{AD}$ .

3) Adunând membru cu membru relațiile

$$AB^2 = BC \cdot BD,$$

$$AC^2 = BC \cdot DC, \text{ obținem}$$

$$AB^2 + AC^2 = BC (BD + DC) \text{ sau } AB^2 + AC^2 = BC^2$$

căci  $BD + DC = BC$ .

*Reciproc, dacă într-un triunghi cu laturile  $a, b, c$  avem relația  $a^2 = b^2 + c^2$ , triunghiul este dreptunghic în  $A$ .*

### Aplicații

1) Un triunghi dreptunghic are catetele  $b, c$ . Pe perpendiculara ridicată în vârful unghiului drept pe planul triunghiului se ia distanța  $d$ . Să se afle distanța de la un punct, situat pe perpendiculară, la ipotenuza triunghiului dat.

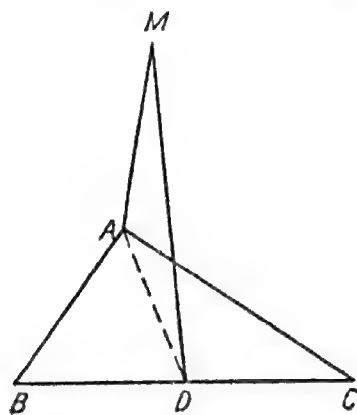


Fig. 95

Distanța de la un punct la o dreaptă este mărimea segmentului din perpendiculara dusă din punct pe dreaptă. Fie triunghiul  $ABC$ ,  $M$  punctul și  $MD \perp BC$ . Punctul  $D$  este piciorul înălțimii dusă din  $A$  pe  $BC$ .

În adevăr,  $MA \perp BC$  și  $AD \perp BC$ , rezultă, pe baza teoremei celor trei perpendiculare, că  $MD \perp BC$  (fig. 95).

Pentru a calcula măsura segmentului  $MD$  folosim triunghiul dreptunghic  $MAD$  unde  $MD^2 = MA^2 + AD^2$  sau înlocuind  $MA = d$  și  $AD = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$  unde  $a^2 = b^2 + c^2$ :

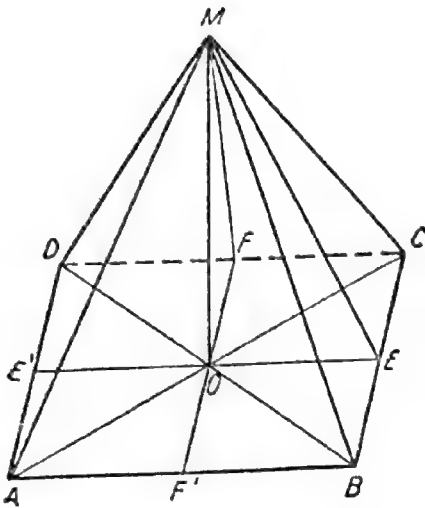


Fig. 96

$$MD^2 = d^2 + \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2};$$

$$MD = \sqrt{\frac{d^2 b^2 + d^2 c^2 + b^2 c^2}{b^2 + c^2}}.$$

2) Se consideră un dreptunghi  $ABCD$  cu dimensiunile  $AB = 40$  cm,  $BC = 16$  cm. În centrul  $O$  al dreptunghiului se ridică perpendiculara pe planul său și se ia pe ea un segment  $OM = 15$  cm. Se cere distanța de la punctul  $M$  la laturile dreptunghiului.

Pe baza teoremei celor trei perpendiculare ( $OM \perp \perp ABCD$  ducem  $OE \perp BC$  și  $OF \perp DC$ ) (fig. 96),  $ME \perp BC$  și  $MF \perp DC$ .

Dar  $OE = \frac{40}{2} = 20$  cm și  $OF = \frac{16}{2} = 8$  cm. Din

triunghiurile dreptunghice  $MOE$  și  $MOF$  avem:

$$ME^2 = 15^2 + 20^2 = 625, \quad ME = \sqrt{625}, \quad ME = 25 \text{ cm.}$$

$$MF^2 = 15^2 + 8^2 = 289, \quad MF = \sqrt{289}, \quad MF = 17 \text{ cm.}$$

Distanțele de la punctul  $M$  (care se găsește pe perpendiculara dusă prin centrul dreptunghiului) la laturile paralele ale dreptunghiului sînt egale ca oblice care au picioarele egal depărtate de piciorul perpendicularei. Deci  $ME = ME'$  și  $MF = MF'$  (notînd cu  $E'$  și  $F'$  picioarele perpendicularelor duse din  $M$  pe  $AD$  și  $AB$ ).



## VI

### Cercul. Poligoane regulate

Am definit cercul ca figura formată de mulțimea punctelor din plan egal depărtate de un punct al planului, numit centrul cercului.

Printr-un punct al planului putem duce câte cercuri vrem luînd ca centru orice punct al planului.

Prin două puncte trec câte cercuri vrem ele au centrele pe mediatoarea segmentului determinat de cele două puncte; raza unuia din aceste cercuri este segmentul care unește centrul (punct al mediatoarei) cu unul din cele două puncte.

Prin trei puncte necoliniare trece un cerc și numai unul.

În adevăr, există un singur punct egal depărtat de cele trei puncte și anume punctul de intersecție a mediatoarelor segmentelor determinate de cele 3 puncte luate două câte două; cercul va trece prin cele trei puncte care sînt vîrfurile unui triunghi, el este circumscris triunghiului. Deci punctul de intersecție a mediatoarelor unui triunghi este centrul cercului circumscris triunghiului. Rezultă că trei puncte necoliniare determină un cerc (fig. 97).

*Consecințe.* Pentru a afla centrul unui cerc dat luăm trei puncte oarecare pe cerc și ducem mediatoarele la două din coardele determinate de cele trei puncte. Punctul de intersecție a mediatoarelor este centrul cercului.

O dreaptă poate avea cu un cerc cel mult două puncte de intersecție. Dacă are două puncte diferite de intersecție, dreapta se numește secantă. În acest caz distanța de la centrul cercului la dreaptă este mai mică decît raza cercului (fig. 98). Dacă dreapta are două puncte confundate de intersecție, dreapta este tangentă la cerc iar distanța

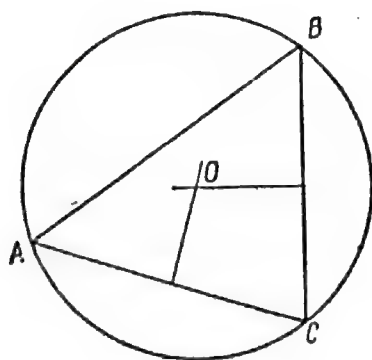


Fig. 97

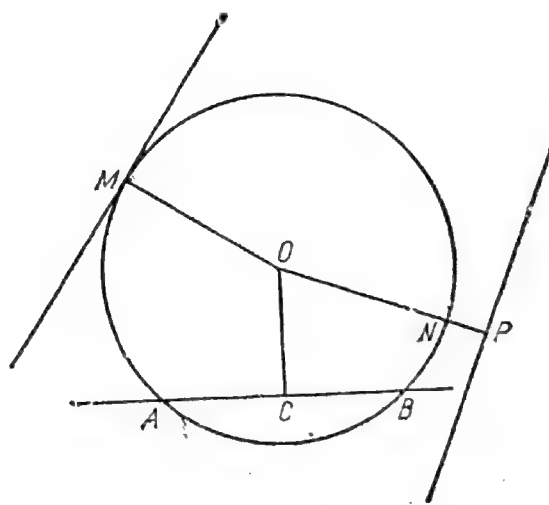


Fig. 98

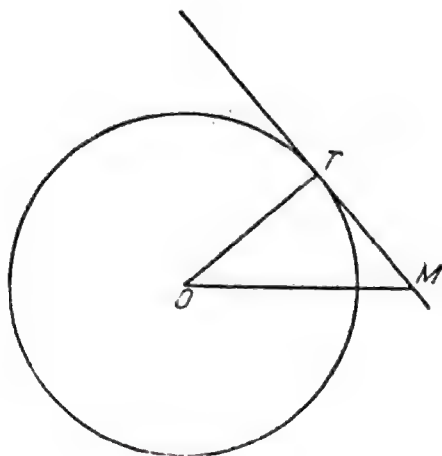


Fig. 99

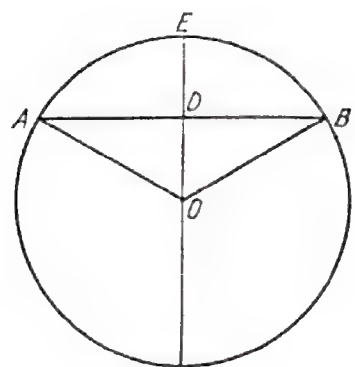


Fig. 100

de la centrul cercului la dreaptă este egală cu raza cercului. Dacă dreapta nu are nici un punct comun cu cercul ea este exterioară cercului. În acest caz, distanța de la centrul cercului la dreaptă este mai mare decât raza cercului.

Notînd cu  $r$  raza cercului și  $d$  distanța de la centrul cercului la o dreaptă dată,

- 1) dacă  $r < d$ , dreapta este secantă,
- 2) dacă  $r = d$ , dreapta este tangentă,
- 3) dacă  $r > d$ , dreapta este exterioară cercului.

Raza este cea mai mică distanță dintre centrul cercului și un punct al tangentei la cerc. În adevăr, luînd un punct  $M$  oarecare pe tangentă diferit de punctul  $T$  de tangentă,  $OM > r$  (fig. 99).

( $OT$  fiind distanța de la  $O$  la tangentă, înseamnă că  $OT \perp TM$ ; raza este perpendiculară pe tangentă în punctul de contact.)

**T e o r e m ă.** *Diametrul perpendicular pe o coardă în cerc împarte coarda și arcu corespunzător în două părți egale.*

Fie coarda  $AB$  și  $OD \perp AB$ , notăm cu  $D$  și  $E$  intersecțiile diametrului perpendicular pe coardă cu coarda și cu arcu  $AB$  (fig. 100). Unim  $O$  cu  $A$  și  $B$ .

Triunghiul  $AOB$  este isoscel. Înălțimea  $OD$ , dusă din vîrfurile laturilor egale, este și mediatoare și bisectoare deci:

$$1) DA = DB; 2) \widehat{AOD} = \widehat{DOB} \text{ deci } \widehat{AE} = \widehat{EB}$$

(într-un cerc la unghiuri la centru egale corespund arce egale).

Reciproc, dreapta care unește mijlocul unei coarde cu mijlocul arcu corespunzător trece prin centrul cercului. În adevăr, unind centrul cu  $D$ , această dreaptă trece prin  $E$  conform teoremei precedente deci  $ED$  trece prin  $O$ .

**T e o r e m ă.** *Diametrul cercului este cea mai mare coardă în cerc.*

Fie cercul cu centrul  $O$  și coarda  $AB$ . Unind  $O$  cu  $A$  și  $B$ , în triunghiul  $AOB$  avem  $AB < OA + OB$ ,  $AB < 2r$  deci  $AB$  este mai mic decât diametrul (fig. 101).

**T e o r e m ă.** *Dacă într-un cerc două coarde sînt paralele, atunci arcele cuprinse între aceste coarde sînt egale.*

Fie cercul  $O$  și coardele  $AB \parallel CD$ . Ducem diametrul perpendicular pe coarda  $AB$ ; el va fi perpendicular și pe  $CD$  (fig. 102). Acest diametru  $MN$  împarte arcele  $\widehat{AB}$

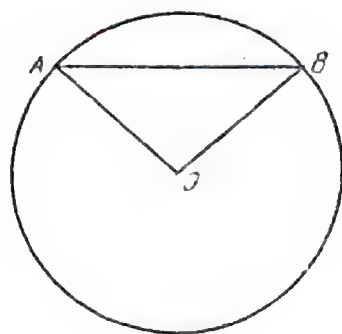


Fig. 101

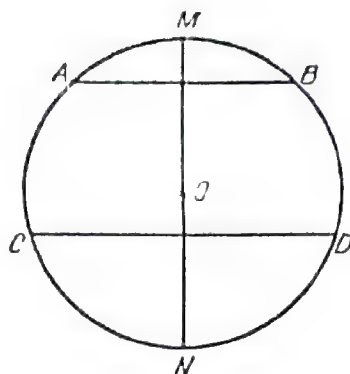


Fig. 102

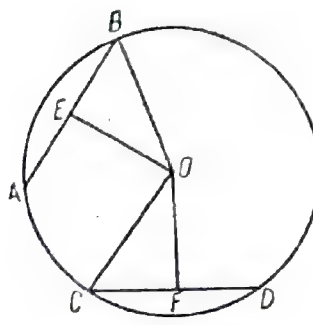


Fig. 103

și  $\widehat{CD}$  în două părți egale:  $\widehat{AM} = \widehat{MB}$  și  $\widehat{CN} = \widehat{ND}$  iar  $\widehat{MAN} = \widehat{MBN}$ ,  $\widehat{AC} = \widehat{BD}$  (diferență de arce egale).

**Teoremă.** În același cerc sau în două cercuri egale, coardele egale sînt egal depărtate de centru și reciproc, coardele egal depărtate de centru sînt egale.

Fie cercul  $O$  și coardele  $AB = CD$ . Ducem  $OE \perp AB$  și  $OF \perp CD$  (fig. 103).

Triunghiurile  $OEB$  și  $OFC$  sînt egale fiind triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele și cîte o catetă respectiv egale.  $OE = OF$  (se opun la unghiuri egale în triunghiuri egale).

Reciproc, dacă  $OE = OF$ , triunghiurile  $OEB$  și  $OFC$  sînt egale avînd ipotenuzele și cîte o catetă respectiv egale. Rezultă  $EB = FC$ , deci și  $AB = CD$ .

Se poate demonstra că într-un cerc sau în două cercuri egale, coarda mai depărtată de centru este mai mică și reciproc dintre două coarde neegal depărtate de centru coarda mai mare este mai apropiată de centru.

Două cercuri au cel mult două puncte comune căci dacă ar avea trei puncte comune s-ar confunda.

Cercurile care au două puncte comune se numesc secante. Coarda care unește punctele comune se numește coardă comună și este perpendiculară pe dreapta care unește centrele celor două cercuri.

În adevăr, mediatoarea coardei  $AB$  din fiecare cerc trece prin centrul cercului respectiv.

Dacă cercurile sînt secante (fig. 104), din triunghiul  $O_1O_2A$  avem:

$$O_1O_2 < O_1A + O_2A \text{ deci } d < r_1 + r_2$$

$O_1O_2 > O_2A - O_1A$  deci  $d > r_2 - r_1$ . Am notat cu  $d$  distanța dintre centrele celor două cercuri de raze  $r_1$  și  $r_2$ . Cercurile care au comune două puncte confundate se numesc tangente (interioare sau exterioare) (fig. 105). Dreapta care unește centrele a două cercuri tangente trece prin punctul de tangență.

În adevăr, în punctul de tangență cele două cercuri au aceeași tangentă iar razele sînt perpendiculare pe această dreaptă în același punct. Dacă cercurile sînt tangente exterioare,

$$d = r_1 + r_2;$$

dacă sînt tangente interioare

$$d = r_2 - r_1 \ (r_2 > r_1).$$

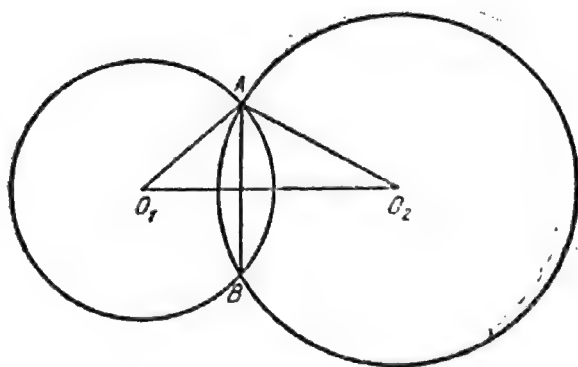


Fig. 104

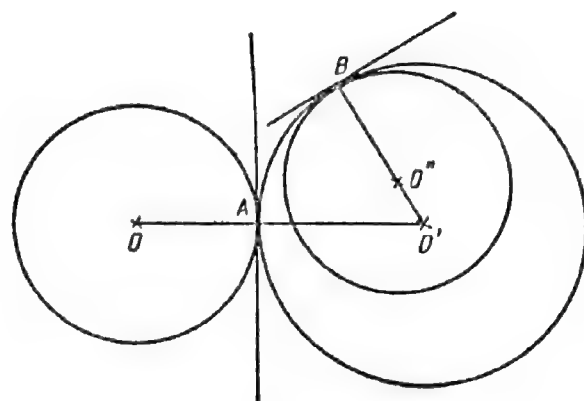


Fig. 105

Dacă cercurile nu au nici un punct comun, ele se numesc interioare, sau exterioare (fig. 106).

Dacă sînt interioare,  $d < r_2 - r_1$ .

Dacă sînt exterioare,  $d > r_1 + r_2$ .

Dacă cercurile interioare au același centru ele se numesc concentrice și  $d = 0$ .

### Unghiuri în cerc

Numim unghi înscris în cerc, unghiul care are vârful pe cerc și laturile secante sau tangente la cerc.

**Teoremă.** *Unghiul înscris în cerc are ca măsură jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale.*

1) Considerăm cazul cînd una din laturi este diametrul cercului. Fie unghiul  $ACD$  unde  $CD$  este diametru și arcul  $AD$  corespunzător unghiului  $ACD$  (fig. 107).

Unind  $A$  cu  $O$  avem: a)  $\widehat{AOD} = \widehat{OAC} + \widehat{OCA}$  (unghi exterior triunghiului).

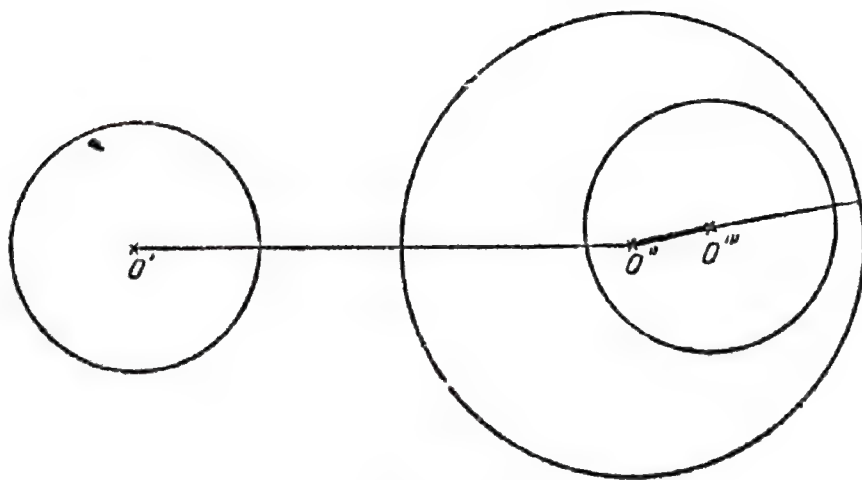


Fig. 106

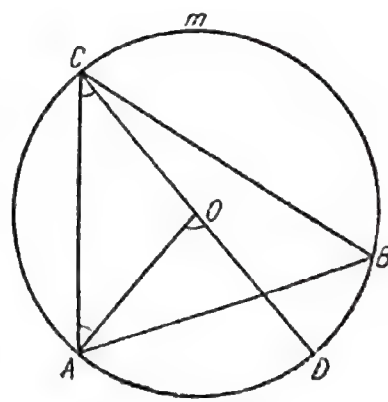


Fig. 107



Dar triunghiul  $OAC$  este isoscel deci  $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$  și  $\text{măs } \widehat{AOD} = \text{măs } \widehat{AD}$  deci:

$$\text{măs } \widehat{ACD} = \frac{1}{2} \text{măs } \widehat{AD}.$$

Dacă considerăm latura  $CB$  de aceeași parte sau de partea cealaltă a centrului față de  $AC$ , ducând diametrul prin  $C$ ,

$\text{măs } \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \text{măs } \widehat{AB}$  ca diferență sau sumă de unghiuri înscrise, cu o latură, diametrul cercului.

*Consecință:* 1) Unghiul  $ACB$  are aceeași măsură când  $C$  se deplasează pe arcul  $AmB$ . Segmentul  $AB$  se vede din orice punct al arcului  $AmB$  sub același unghi de aceea se numește *arc capabil de un unghi dat relativ la segmentul  $AB$* .

2) Unghiurile înscrise într-un semicerc sînt unghiuri drepte.

### Patrulater inscriptibil

Dacă un patrulater are toate vîrfurile pe cerc spunem că este înscris în cerc. Am văzut că prin trei puncte trece un cerc și numai unul. Dar prin patru puncte? Condiția necesară și suficientă ca patru puncte să fie conciclice (pe același cerc) este dată de teorema următoare:

*Un patrulater înscris în cerc are unghiurile opuse suplimentare și reciproc, dacă într-un patrulater unghiurile opuse sînt suplimentare, atunci patrulaterul poate fi înscris într-un cerc (este inscriptibil).*

În adevăr, fie patrulaterul  $ABCD$  înscris în cercul  $O$  (fig. 108).

$$\text{măs } (\hat{A} + \hat{C}) = \frac{1}{2} \text{măs } (\widehat{DCB} + \widehat{DAB}) \text{ deci: } \text{măs } (\hat{A} + \hat{C}) = 180^\circ;$$

$$\text{analog, } \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

*Reciproc, dacă  $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ , patrulaterul este inscriptibil.* Considerăm cercul determinat de punctele  $A, B, D$ . Punctul  $C$  poate să fie exterior, interior sau pe cercul  $O$  (fig. 109).

Dacă  $C$  este exterior, latura  $CD$  taie cercul în  $C'$

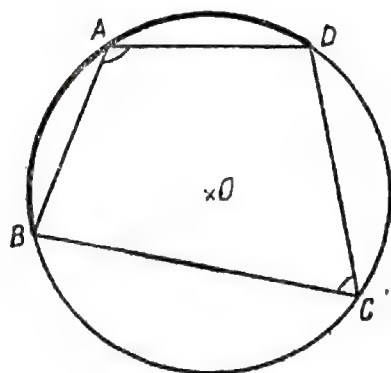


Fig. 108

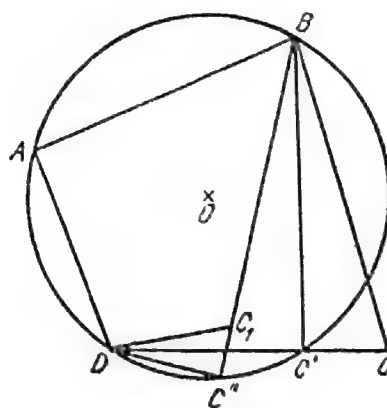


Fig. 109

$\hat{A} + \widehat{DC'B} = 180^\circ$  (proprietatea directă). Dar  $\widehat{DC'B} > \hat{C}$  ( $\widehat{DC'B}$  unghi exterior triunghiului  $BCC'$ ) ar însemna că  $\hat{A} + \hat{C} < 180^\circ$  ceea ce contrazice ipoteza. Dacă  $C_1$  este interior cercului, latura  $C_1B$  taie cercul în  $C''$  și atunci:  $\widehat{DC''B} + \hat{A} = 180^\circ$ .

Dar  $\widehat{DC''B} < \widehat{DC_1B}$  ( $\widehat{DC_1B}$  exterior triunghiului  $C_1C''D$ ) ar însemna  $\hat{A} + \hat{C}_1 > 180^\circ$  ceea ce contrazice ipoteza. Rămâne deci că punctul  $C$  este pe cerc ( $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ ).

**Tangente la cerc.** Într-un punct al cercului se poate duce o singură tangentă la cerc. Dintr-un punct exterior se pot duce două tangente la cerc; punctele de tangență sînt punctele de intersecție ale cercului cu cercul avînd ca diametru segmentul care unește punctul exterior cu centrul cercului.

În adevăr, fie  $O$  centrul și  $M$  punctul exterior. Ducînd cercul de diametru  $OM$ , el intersectează cercul  $O$  în punctele  $A$  și  $B$  (fig. 110) și  $OA \perp AM$ ,  $OB \perp BM$ .

Deci  $MA$  și  $MB$  sînt tangentele din  $M$  la cerc.

**Teoremă.** *Segmentele din tangentele duse din același punct la un cerc limitate de punct și punctul de tangență sînt egale iar dreapta care unește punctul cu centrul cercului este bisectoarea unghiului format de cele două tangente.*

În adevăr, din  $M$  exterior cercului  $O$  se duc tangentele  $MA$ ,  $MB$ ,  $\triangle MAO = \triangle MBO$  (triunghiuri dreptunghice care au catetele respectiv egale), deci  $MA = MB$  și  $\widehat{AMO} = \widehat{OMB}$  (fig. 110).

Două cercuri diferite pot avea cel mult patru tangente comune (două interioare și două exterioare) și anume: patru tangente comune dacă cercurile sînt exterioare (fig. 111); trei tangente comune dacă cercurile sînt tangente exterioare (una este tangenta în punctul de tangență a celor două cercuri și două tangentele exterioare); două tangente dacă cercurile sînt secante; o tangentă dacă cercurile sînt tangente interioare; (fig. 112, 113) nici o tangentă dacă sînt cercuri interioare netangente.

### Aplicații

1) Într-un patrulater înscris, unghiul format de o diagonală cu o latură este egal cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă.

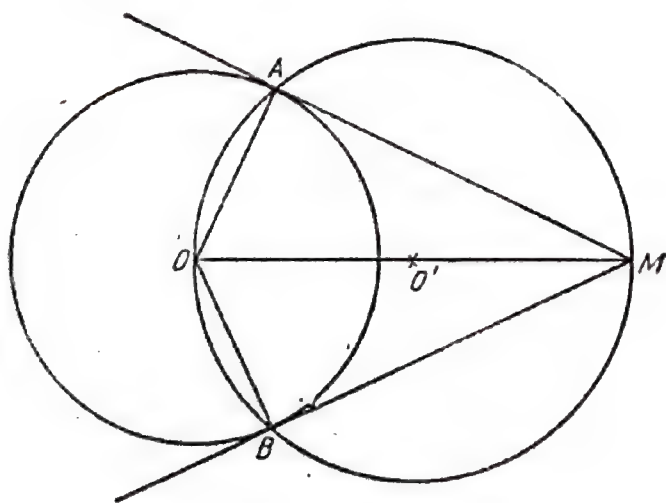


Fig. 110

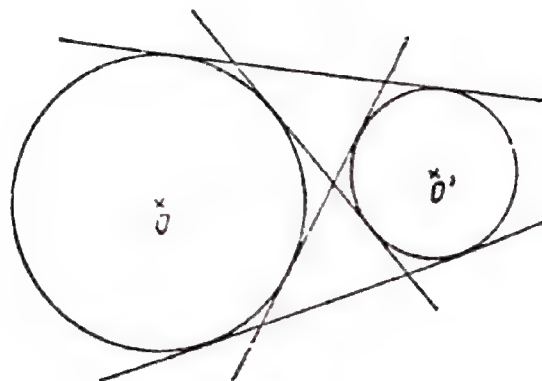


Fig. 111

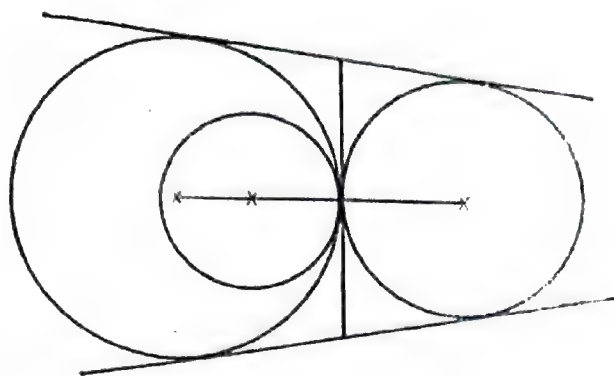


Fig. 112

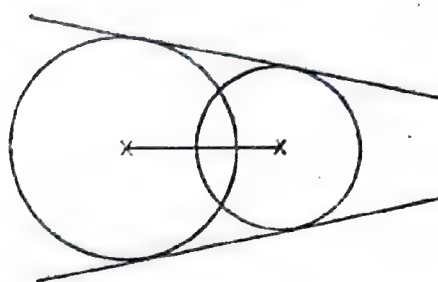


Fig. 113

Reciproc, dacă într-un patrulater o diagonală formează cu o latură a patrulaterului un unghi egal cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă, atunci patrulaterul este inscriptibil.

Dacă  $ABCD$  este înscris în cerc avem (fig. 114):

$$\text{măs } \widehat{ABD} = \text{măs } \frac{1}{2} \widehat{AD}; \quad \text{măs } \widehat{ACD} = \frac{1}{2} \text{măs } \widehat{AD} \quad \text{deci}$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{ACD}.$$

Demonstrarea teoremei reciproce se face prin reducere la absurd asemănător teoremei reciproce anterioare (fig. 114).

2) În triunghiul  $ABC$  se duc înălțimile  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ .

Să se demonstreze că:

a) înălțimile triunghiului  $ABC$  sînt bisectoarele triunghiului  $A'B'C'$  (triunghi ortic determinat de picioarele înălțimilor);

b) triunghiurile  $AB'C'$ ,  $CA'B'$ ,  $BC'A'$  sînt asemenea cu triunghiul  $ABC$ .

a) Fie triunghiul  $ABC$  și înălțimile  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  (fig. 115). Trebuie să demonstrăm că  $\widehat{C'A'A} = \widehat{AA'B'}$ . Vom dovedi că fiecare din cele două unghiuri sînt egale respectiv cu alte două unghiuri egale între ele.

Dacă notăm cu  $H$  punctul de intersecție a înălțimilor (ortocentrul), patrulaterul  $HC'BA'$  este inscriptibil ( $\widehat{BC'C} = 1 \text{ dr}$ ,  $\widehat{AA'B} = 1 \text{ dr}$ ). Pe baza aplicației 1),  $\widehat{C'A'A} = \widehat{C'BB'}$ ; analog,  $\widehat{AA'B'} = \widehat{C'CA}$ . Observăm că  $\widehat{C'CA} = \widehat{ABB'}$  (avînd același complement, unghiul  $BAC$ ).

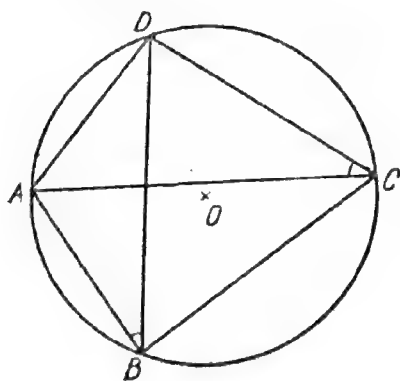


Fig. 114

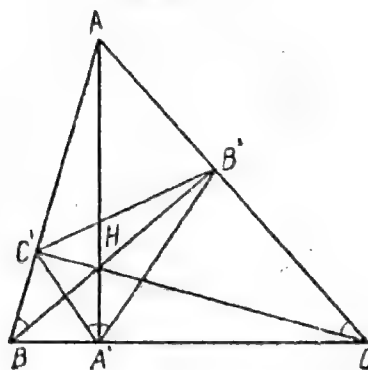


Fig. 115



Fiecare înălțime a triunghiului  $ABC$  este bisectoare în triunghiul  $A'B'C'$ .

b) Patrulaterul  $BCB'C'$  fiind inscribibil (aplicația 1) avem relațiile:  $\widehat{AC'B'} = \widehat{ACB}$ , deci  $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$  (având două unghiuri respectiv egale). Demonstrăm în mod analog că  $\triangle CA'B' \sim \triangle ABC$  și  $\triangle BA'C' \sim \triangle ABC$ .

### Poligoane regulate

Am definit poligoanele regulate ca poligoane care au laturile egale și unghiurile egale.

*Dacă un cerc este împărțit în părți egale, atunci unind punctele de diviziune consecutive și ducând tangente prin punctele de diviziune, se obțin două poligoane regulate primul înscris în cerc, al doilea circumscris cercului.*

În adevăr, fie cercul  $O$  împărțit în  $n$  părți egale. Unind consecutiv punctele de diviziune, obținem un poligon care are  $n$  vârfuri pe cerc și  $n$  laturi, coarde în cerc. Coardele sînt egale căci se opun în același cerc la arce egale, deci poligonul are toate laturile egale. Un unghi oarecare  $\alpha$  al poligonului are ca măsură, ca unghi înscris în cerc, jumătate din măsura arcului subîntins deci  $m\alpha = \frac{n-2}{2} \cdot \frac{360^\circ}{n} = \frac{(n-2)180^\circ}{n}$ .

Laturile fiind egale și unghiurile egale, poligonul este regulat. Acest poligon este înscris în cercul  $O$  (fig. 116).

Ducînd tangente în punctele de diviziune, se formează triunghiuri isoscele cu bazele laturile poligonului înscris și laturile egale (tangentele la cerc în extremitățile acestor laturi). Aceste triunghiuri avînd bazele egale și unghiurile alăturate bazelor egale (au ca măsură  $\frac{180^\circ}{n}$ ), sînt triunghiuri egale două cîte două. Unghiurile poligonului sînt egale și laturile egale, ca sume de segmente egale deci poligonul este regulat. El este circumscris cercului  $O$ , iar cercul este înscris în acest poligon (raza cercului este apotema poligonului).

Numim apotemă a unui poligon, segmentul din perpendiculara dusă din centrul poligonului pe o latură. Ea este raza cercului înscris în poligon.

**Pătratul înscris.** Fie cercul  $O$  de rază  $R$ . Ducînd prin  $O$  doi diametri perpendiculari, aceștia împart cercul în patru părți egale (fiecare diviziune avînd ca mărime  $90^\circ$ ). (fig. 117). Triunghiul  $OAB$  este un triunghi dreptunghic isoscel ( $OA = OB$  ca raze). Vom avea:

$$AB^2 = 2 OA^2; \quad AB^2 = 2R^2; \quad AB = R\sqrt{2}; \quad l_4 = R\sqrt{2}.$$

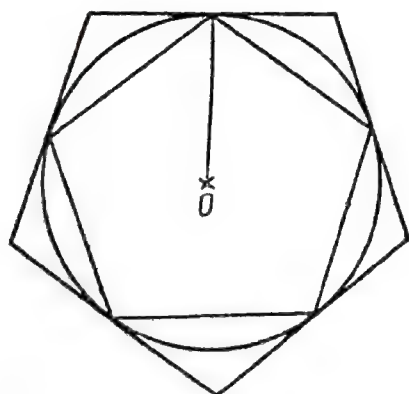


Fig. 116

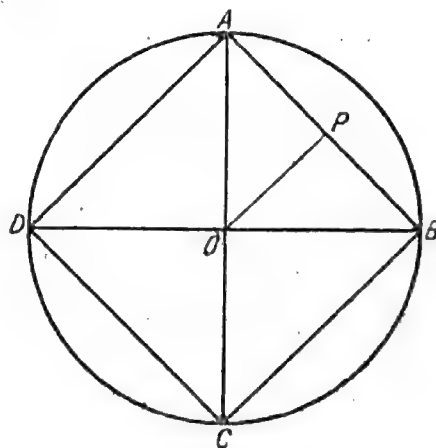


Fig. 117



Ducând  $OP \perp AB$ , apotema  $OP = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ ;  $a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ .

*Observare.* În triunghiul dreptunghic isoscel  $AOP$ :

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{R}{R\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{și } \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

**Hexagonul regulat înscris.** Fie cercul  $O$  împărțit în șase părți egale prin punctele de diviziune  $ABCDEF$  (fig. 118). Fiecare arc de cerc cuprins între două puncte de diviziune consecutive are  $60^\circ$ . Unind prin segmente de dreaptă punctele consecutive se obține hexagonul  $ABCDEF$ .

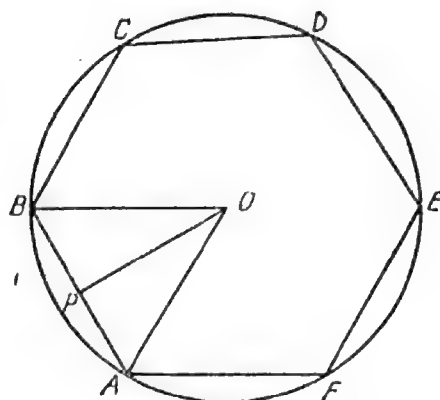


Fig. 118

Formăm triunghiul isoscel  $OAB$  în care  $OA = OB$  (raze) iar  $\widehat{AOB} = 60^\circ$  (unghi la centru).

Rezultă că triunghiul  $AOB$  este echilateral așadar  $AB = l_6 = R$ .

Ducem apotema  $OP$ ;  $OP^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$ ,  $a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} R$ .

*Observare.* În triunghiul dreptunghic  $OPB$  avem

$$\widehat{POB} = 30^\circ, \widehat{PBO} = 60^\circ \text{ deci } \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \cos 30^\circ =$$

$$= \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{R\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{\frac{R}{2}} = \sqrt{3}.$$

Regăsim propoziția: Într-un triunghi dreptunghic, care are un unghi de  $30^\circ$ , cateta care se opune unghiului de  $30^\circ$  este jumătate din ipotenuză.

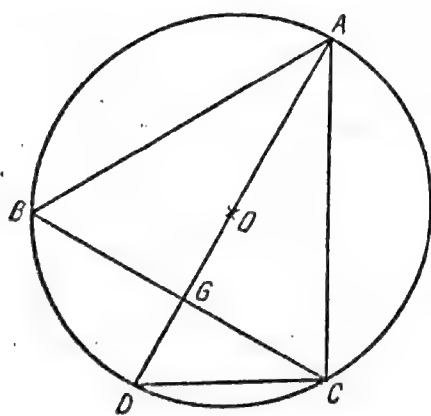


Fig. 119

**Triunghiul echilateral înscris.** Împărțim un cerc în șase părți egale purtând, cu compasul, raza cercului drept coardă apoi unim punctele de diviziune din două în două. Obținem arce care au măsura  $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ .

Pentru a calcula latura triunghiului echilateral  $l_3$ , o încadrăm într-un triunghi dreptunghic ducând diametrul  $AD$  (fig. 119). Triunghiul  $ADC$  este dreptunghic în  $C$ . Avem:

$$AC^2 = AD^2 - DC^2 \text{ sau } AC^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2;$$

$$l_3 = R\sqrt{3}.$$

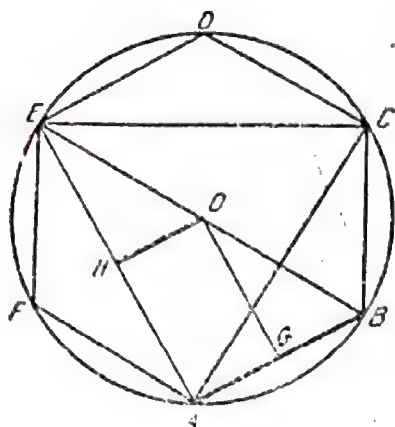


Fig. 120

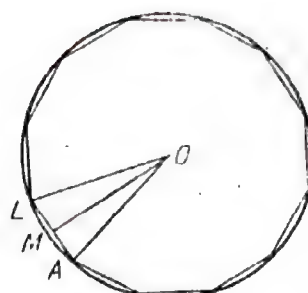


Fig. 121

Notînd cu  $G$  punctul de intersecție a diametrului  $AD$  cu  $BC$ , apotema triunghiului este  $OG$ . Patrulaterul  $OBDC$  avînd toate laturile egale este romb deci

$$OG = \frac{R}{2} \text{ deci: } l_3 = R\sqrt{3}, a_3 = \frac{R}{2}.$$

Legătura dintre laturile și apotemele triunghiului echilateral și exagonului regulat pot fi urmărite pe figura 120:

$$OH = a_3 = \frac{l_6}{2}; OG = a_6 = \frac{l_3}{2} \text{ (OH și OG linii mijlocii în triunghiul AEB).}$$

Pentru calcularea elementelor unui poligon regulat oarecare putem folosi rapoartele trigonometrice cunoscute. De exemplu în poligonul regulat cu  $n$  laturi (fig. 121) dacă notăm cu  $l_n$  latura poligonului, cu  $a_n$  apotema, cu  $R$  raza cercului circumscris în  $\triangle AOM$ , avem relațiile:

$$\frac{l_n}{2} = R \sin \frac{180^\circ}{n}; a_n = R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

De exemplu, să calculăm latura și apotema octogonului regulat cunoscînd raza cercului circumscris  $R$ .

$$l_8 = 2R \sin \frac{180^\circ}{8} = 2R \sin 22^\circ 30' = 2R \cdot 0,383 = 0,766 R,$$

$$a_8 = R \cos 22^\circ 30' = 0,924 R.$$

*Observare.* Octogonul se poate construi împărțind întii cercul în patru părți egale apoi ducînd din centrul cercului perpendiculare pe laturile pătratului. Ele vor împărți arcele respective în părți egale.

### Probleme

- 1) Două coarde  $AB$  și  $CD$  se taie într-un punct  $E$  din interiorul cercului formînd unghiuri egale cu diametrul care trece prin  $E$ . Să se arate că:
  - a) aceste coarde sînt egal depărtate de centru;
  - b) patrulaterul  $ABCD$  este trapez isoscel.

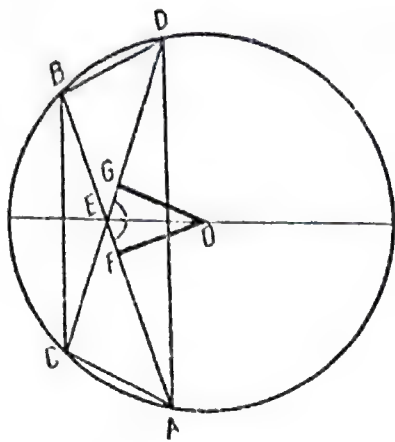


Fig. 122

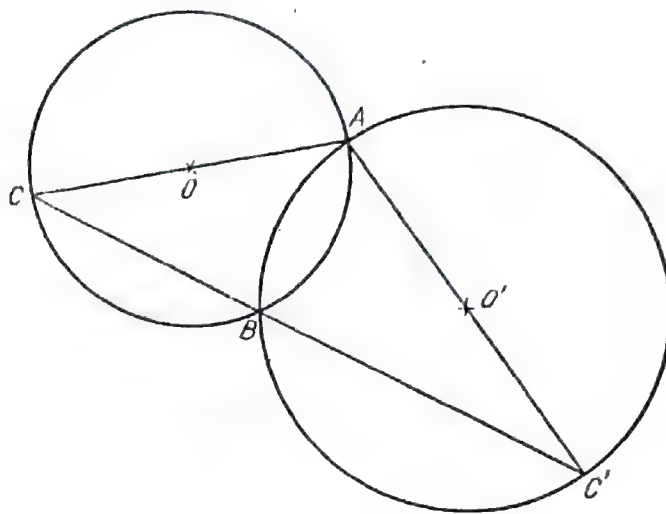


Fig. 123

a) Ducem  $OF \perp AB$  și  $OG \perp CD$  (fig. 122). Triunghiurile  $EOF$  și  $EOG$  sînt triunghiuri dreptunghice egale căci au ipotenuza comună și cite un unghi ascuțit egal. Rezultă:  $OF = OG$ .

b) În patrulaterul  $ABCD$  diagonalele  $AB$  și  $CD$  sînt egale fiind coarde egal depărtate de centru.

Arcele  $\widehat{AC}$  și  $\widehat{BD}$  sînt egale ca diferențe de arce egale.

$\widehat{AC} = \widehat{AB} - \widehat{CB}$ ,  $\widehat{BD} = \widehat{CD} - \widehat{CB}$ . Dar  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$  (corespond coardelor egale  $AB$  și  $CD$ ) deci  $\widehat{AC} = \widehat{BD}$  și  $\widehat{BCD} = \widehat{CDA}$  (măș  $\widehat{AC} =$  măș  $\widehat{BD}$ ). Rezultă că  $BC \parallel AD$  (formează cu  $CD$  unghiuri alterne interne egale).

Patrulaterul  $ABCD$  avînd două laturi paralele este trapez; trapezul  $ABCD$  avînd diagonalele egale este trapez isoscel.

2) Se dau cercurile  $O$  și  $O'$  secante în  $A$  și  $B$ . Se duc prin  $A$  diametrii cercurilor  $AC$  și  $AC'$ . Să se arate că:

a) punctele  $CBC'$  sînt coliniare.

b)  $CC' = 2 \cdot OO'$ .

Pe figura 123 avem:

a)  $\widehat{ABC} = 90^\circ$ ,  $\widehat{ABC'} = 90^\circ$  (înscrise în semicercuri)

$\widehat{ABC} + \widehat{ABC'} = 180^\circ$  deci

$BC$  și  $BC'$  sînt în prelungire;  $C, B, C'$  coliniare

b)  $OO'$  este linie mijlocie în  $\triangle ACC'$  deci

$$OO' = \frac{CC'}{2}.$$

3) Să se demonstreze că dacă prin punctul de contact a două cercuri tangente exterioare ducem două secante și unim punctele lor de intersecție cu fiecare cerc, atunci se formează triunghiuri asemenea.

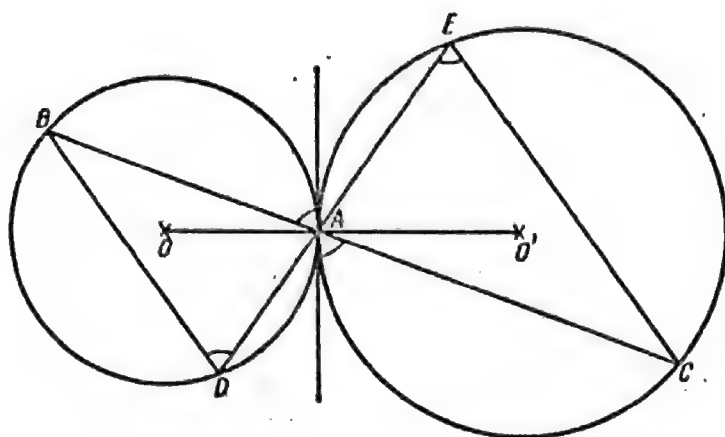


Fig. 124

Notînd cu  $A$  punctul de tangentă ducem secantele  $BAC$  și  $DAE$  și tangenta comună în  $A$  (fig. 124). Unghiurile opuse la vîrf formate de tangenta în  $A$  și secanta  $BC$  sînt egale. Rezultă

$$\begin{aligned} \text{măs } \widehat{AB} &= \text{măs } \widehat{AC} \text{ deci} \\ \Delta ABD &\sim \Delta AEC \left[ \begin{array}{l} 1^\circ \end{array} \right] \widehat{EAC} = \\ &= \widehat{BAD}, \text{ opuse la vîrf,} \\ 2^\circ \widehat{E} &= \widehat{D} \left( \text{măs } \widehat{E} = \text{măs } \frac{\widehat{AC}}{2} = \right. \\ &= \text{măs } \widehat{D} = \left. \text{măs } \frac{\widehat{AB}}{2} \right]. \end{aligned}$$

4) Fie triunghiul dreptunghic  $ADB$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) în care:  $AD = 15 \text{ cm}$  și  $\text{tg } B = \frac{3}{4}$ .

Pe cateta  $AB$  ca diametru, se construiește un cerc care întîlnește ipotenuza în  $I$ . Tangenta la cerc dusă în punctul  $B$  întîlnește dreapta  $AI$  în  $C$ ; paralela prin  $I$  la această tangentă întîlnește pe  $AB$  și  $DC$  respectiv în  $M$  și  $N$ .

a) Să se afle lungimea diagonalelor trapezului  $ABCD$ .

b) Să se arate că  $MI = IN$

(Concurs matematică cl. a VII-a, etapa locală, București 1968)

Se dau:

a)  $AD = 15 \text{ cm}$ ,  $\text{tg } B = \frac{3}{4}$ . În triunghiul dreptunghic  $ABD$  (fig. 125) avem:

$$AD = AB \text{ tg } B, \quad 15 = \frac{3}{4} AB, \quad AB = 20 \text{ cm},$$

$$DB = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25. \quad \text{Diagonala } DB = 25 \text{ cm.}$$

Pentru a calcula diagonala  $AC$  considerăm triunghiurile dreptunghice  $ABC$  ( $AB \perp BC$ ),  $ABD$ .

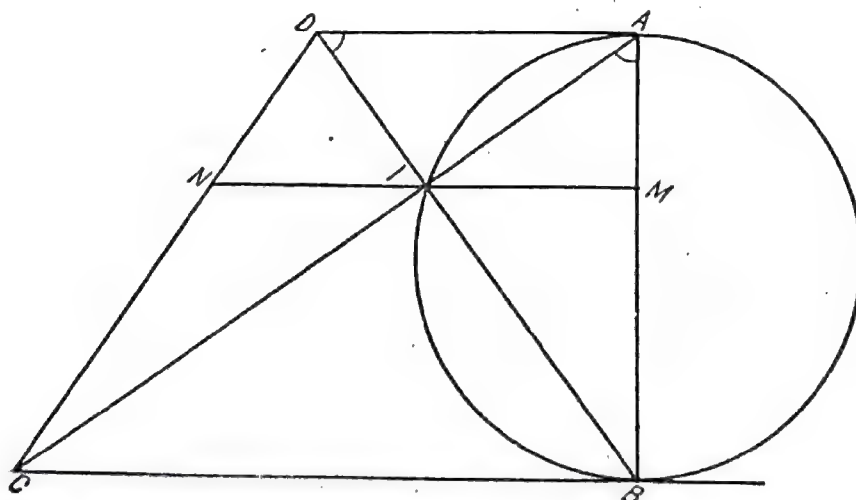


Fig. 125



$\triangle ABC \sim \triangle ABD$  ( $\widehat{BAC} = \widehat{BDA}$  avînd același complement,  $\widehat{CAD}$ ).

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{BD}, \quad \frac{20}{15} = \frac{AC}{25}, \quad AC = \frac{100}{3} = 33 \frac{1}{3} \text{ cm.}$$

b) Din triunghiul  $ACB$ ,  $IM \parallel CB$ ,  $\frac{IM}{CB} = \frac{AM}{AB}$ ;

din triunghiul  $BDC$ ,  $IN \parallel BC$ ,  $\frac{IN}{CB} = \frac{DN}{DC}$ .

Dar dreptele  $AD \parallel MN \parallel BC$  determină pe secantele  $AB$ ,  $DC$  segmente proporționale:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DC} \text{ deci și } \frac{IM}{CB} = \frac{IN}{CB}, \text{ de unde:}$$

$$IM = IN.$$

5) În piramida triunghiulară regulată  $VABC$  se dau:  $AB = 3 \text{ cm}$ ;  $VA = 5 \text{ cm}$ . Să se calculeze:

a) unghiul pe care-l face o muchie laterală cu planul bazei;

b) unghiul pe care-l face o față laterală cu planul bazei.

a) Unghiul dreptei cu planul este unghiul dintre dreaptă și proiecția ei pe plan. Vîrfurile  $V$  se proiectează în  $O$  (centrul cercului circumscris triunghiului echilateral  $ABC$ )

deci unghiul muchiei  $VB$  cu planul este  $\widehat{VBO}$  pe care-l notăm cu  $\alpha$ .

În triunghiul dreptunghic  $VOB$  (fig. 126) avem  $VB = 5 \text{ cm}$  și  $OB = R = \frac{AB}{\sqrt{3}}$  ( $l_3 = R\sqrt{3}$ ) deci  $R = \sqrt{3}$ .

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{1,732}{5} = 0,3464, \quad \alpha \approx 69^\circ 30'.$$

b) Unghiul diedru format de o față laterală ( $VBC$ ) cu planul bazei are unghiul plan corespunzător diedrului, unghiul  $ODV = \beta$ .

Acest unghi este format de apotema piramidei și apotema bazei.

Din triunghiul dreptunghic  $VOB$  obținem

$$VO^2 = 25 - 3 = 22, \quad VO = \sqrt{22}.$$

Știînd că  $OD = \frac{R}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , putem calcula  $\tan \beta$

$$\tan \beta = \frac{VO}{OD} = \frac{2\sqrt{22}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{22}{3}} \approx 5.$$

$$\beta \approx 78^\circ 30'.$$

6) Cercurile  $O_1$  de rază  $a$  și  $O_2$  de rază  $3a$  sînt tangente exterior în  $T$ . Se duce tangenta comună exterioară  $AB$ . Tangenta în  $T$  la cele două cercuri taie pe  $AB$  în  $E$ . Se cere:

a) Lungimea segmentului  $AB$  în funcție de  $a$ .

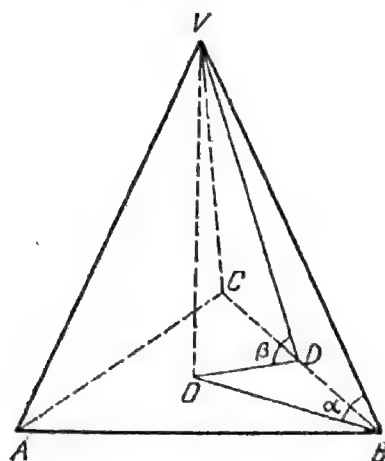


Fig. 126

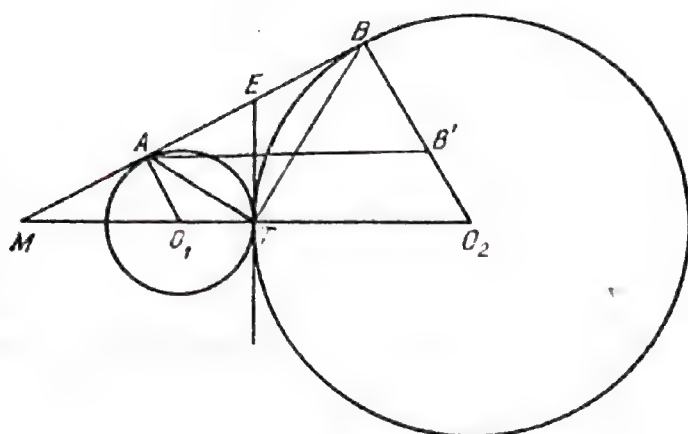


Fig. 127

b)  $M$  fiind punctul de intersecție a dreptelor  $O_1O_2$  și  $AB$ , să se calculeze  $MO_1$ .

c) Să se calculeze unghiul format de  $O_1O_2$  și  $AB$ .

d) Să se arate că dreptele  $AT$  și  $BT$  sînt perpendiculare.

e) Să se arate că  $ET = \frac{AB}{2}$ .

a) Pe figura 127 ducem prin  $A$  dreapta  $AB' \parallel O_1O_2$  ( $B'$  pe  $O_2B$ )  
 $AB^2 = AB'^2 - BB'^2$ ;  $AB^2 = 16a^2 -$   
 $- 4a^2$ ,  $AB = 2a\sqrt{3}$ .

b)  $\Delta MO_1 A \sim \Delta MO_2 B$  (teorema

fundamentală a asemănării) deci  $\frac{MO_1}{MO_2} = \frac{a}{3a}$  sau  $\frac{MO_1}{MO_1 + 4a} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$ .

Formăm proporția derivată  $\frac{MO_1}{4a} = \frac{1}{2}$ ;  $MO_1 = 2a$ .

c) În triunghiul  $B'AB$  ipotenuza  $AB' = 4a$ , cateta  $BB' = 2a$ ,  $\sin \widehat{BAB'} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}$ , deci  $\widehat{BAB'} = 30^\circ$ .

d) În triunghiurile isoscele  $EAT$  și  $EBT$  ( $EA = ET$  și  $EB = ET$  tangente la cerc)  $\widehat{EAT} = \widehat{ETA}$  și  $\widehat{EBT} = \widehat{ETB}$ . Dar suma unghiurilor celor două triunghiuri este formată din  $\widehat{AET} + \widehat{TEB} = 180^\circ$  și  $2(\widehat{ATE} + \widehat{ETB})$ .

$$\text{Deci } 2(\widehat{ATE} + \widehat{ETB}) = 180^\circ; \widehat{ATB} = 90^\circ.$$

e) Din  $AE = ET = EB$  rezultă  $AE = EB = \frac{AB}{2}$  deci

$$ET = \frac{AB}{2}.$$

7) Fie paralelogramul  $ABCD$  în care  $AB = 2 BC$  și unghiul  $A = 60^\circ$ . Notăm cu  $M$ , mijlocul laturii  $CD$ . Dreapta  $AM$  intersectează diagonala  $DB$  în  $E$ . Se cere:

a) Să se demonstreze că triunghiul BCM este echilateral.

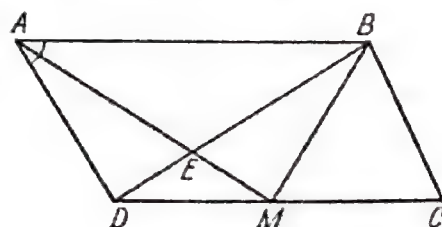
b) Să se arate că  $ABMD$  este trapez înscris în cercul de diametru  $AB$ .

c) Triunghiurile  $ADB$  și  $AMB$  sînt triunghiuri dreptunghice egale.

d) Dacă  $DB = 5\sqrt{3}$  cm să se afle perimetrul triunghiului DME.

Pe figura 128

a)  $\overline{AB} = \overline{DC}$  (laturi opuse în paralelogram rezultă  $MC = BC$ ; triunghiul  $MBC$  este isoscel și  $\hat{A} = \hat{C} = 60^\circ$  deci triunghiul  $MBC$  este echilateral.



**Fig. 128**

b) Patrulaterul  $ABMD$  este trapez ( $DM \parallel AB$ ) și  $AD = MB$  ( $MB = BC = AD$ ), deci este trapez isoscel.

Trapezul isoscel este inscriptibil într-un cerc. Coardele  $AD$ ,  $DM$ ,  $MB$  sînt egale și subîntind fiecare unghiuri de  $60^\circ$  ( $\text{măs } \widehat{DAB} = \text{măs } \frac{\widehat{MB} + \widehat{MD}}{2}$  deci  $60^\circ = \text{măs } \frac{2\widehat{MB}}{2}$ ). Trapezul  $ABMD$  este înscris într-un cerc cu diametrul  $AB$ .

c) Triunghiurile  $ADB$  și  $AMB$  sînt dreptunghice (înscrise într-un semicerc) și au ipotenuza comună și catetele egale ( $AD = MB$ ) deci  $\triangle ADB = \triangle AMB$ .

d) În trapezul  $MDAB$  s-au format triunghiurile isoscele asemenea  $\triangle DEM \sim \triangle AEB$ .  
Avem:

$$\frac{DE}{EB} = \frac{DM}{AB}, \text{ sau, formînd o proporție derivată: } \frac{DE}{DB} = \frac{DM}{3DM} = \frac{1}{3},$$

$$DE = \frac{5\sqrt{3}}{3}, \quad DE = EM = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

$DM$  subîntinde un arc de  $60^\circ$  deci este latura hexagonului regulat înscris în cerc, iar  $DB$  subîntinde un arc de  $120^\circ$  deci  $DB$  este latura triunghiului echilateral înscris în cerc ( $l_3 = R\sqrt{3}$ ). Rezultă:  $R = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 5$  și  $l_6 = DM = 5$ .

Notînd perimetrul triunghiului  $DEM$  cu  $2p$  avem

$$2p = \frac{10\sqrt{3}}{3} + 5.$$

## VII

### Construcții grafice

În acest capitol vom prezenta mai multe construcții geometrice utilizând numai rigla și compasul.

Pentru a construi pe o semidreaptă  $Ox$  un segment egal cu un segment  $AB$  dat, luăm în deschizătura compasului segmentul  $AB$  și-l purtăm pe semidreaptă punând vârful ascuțit al compasului în punctul  $O$ .

Construcția mediatoarei se bazează pe proprietatea caracteristică a punctelor mediatoarei de a fi egal depărtate de extremitățile segmentului. Dar două puncte determină o dreaptă. Vom construi deci două puncte ale mediatoarei.

Fie segmentul  $AB$  (fig. 129) cu o deschizătură de compas mai mare decât jumătatea segmentului  $AB$  ducem două arce de cerc cu centrul în  $A$ , de o parte și alta a segmentului. Mutăm vârful ascuțit al compasului în  $B$  păstrând aceeași deschidere a compasului și ducem cele două arce care intersectează celelalte două arce respectiv în  $D$  și  $E$ ; dreapta  $DE$  este mediatoarea segmentului  $AB$ .

În adevăr, prin construcția făcută s-au format triunghiurile isoscele  $ADB$  și  $AEB$ . Înălțimile celor două triunghiuri fiind și mediane trec prin punctul  $M$ , mijlocul segmentului  $AB$ , și sînt perpendiculare în  $M$  pe  $BC$ .

**Construcția perpendicularei pe o dreaptă.**

a) Fie dreapta  $x'x$  și un punct  $A \in x'x$  (fig. 130). Pentru a construi perpendiculara în  $A$  pe  $x'x$ , luăm pe  $x'x$  de o parte și de alta a punctului  $A$  două segmente egale  $AB = AC$ . Perpendiculara în  $A$  pe  $x'x$  va fi mediatoarea segmentului  $BC$  pe care știm s-o construim. În acest caz, cunoscînd un punct al mediatoarei ( $A$ ), putem construi un singur punct prin construcția cunoscută. În practică este bine să găsim două puncte și să verificăm dacă dreapta construită trece prin  $A$ ; dacă nu trece prin  $A$  refacem construcția.

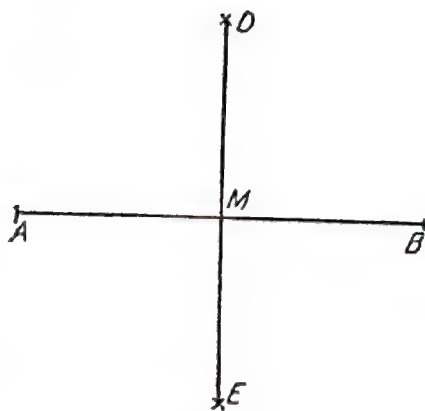


Fig. 129

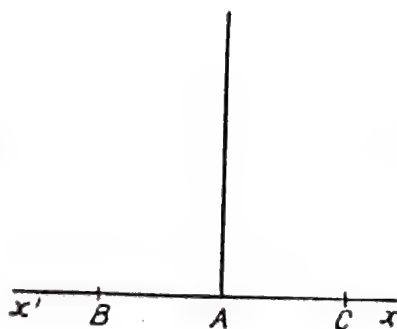


Fig. 130

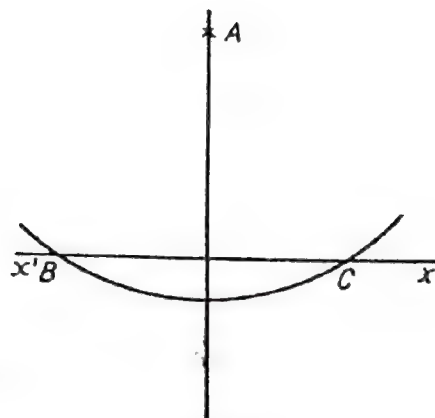


Fig. 131



b) Fie dreapta  $x'x$  și un punct  $A$  exterior dreptei (fig. 131). Pentru a găsi segmentul a cărei mediatoare trece prin  $A$ , tăiem dreapta cu un arc de cerc cu centrul în  $A$  și raza arbitrară, dar mai mare decât distanța de la punct la dreaptă. Arcul intersectează dreapta în punctele  $B$  și  $C$  care determină segmentul căutat. Mediatoarea lui  $BC$ , care este coardă în cercul cu centrul  $A$ , trece prin  $A$  și este perpendiculară pe dreaptă.

### Construcția unui unghi egal cu un unghi dat

Fiind dat un unghi  $xOy$ , pentru a construi un unghi egal cu unghiul  $xOy$ , procedăm astfel: luăm o semidreaptă  $O'x'$  și tăiem laturile unghiului  $xOy$ , cu un arc de cerc, cu centrul în  $O$  și raza arbitrară în  $A$  și  $B$ . Cu aceeași rază, ducem un arc de cerc cu centrul în  $O'$ . Acest arc taie semidreapta  $O'x'$  într-un punct  $A'$ . Luăm din  $A'$  coarda  $A'B' = AB$  (fig. 132) și unim  $O'$  cu  $B'$ ; unghiul  $A'O'B'$  este egal cu  $\widehat{xOy}$ . În adevăr, în două cercuri egale la coarde egale ( $AB = A'B'$ ) corespund unghiuri la centru egale ( $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$ ).

### Construcția bisectoarei unui unghi

Fiind dat un unghi  $xOy$  pentru a-i construi bisectoarea tăiem laturile unghiului cu un arc de cerc cu centrul în  $O$  și raza arbitrară. Fie  $A$  și  $B$  punctele de intersecție a cercului cu laturile unghiului. Mediatoarea segmentului  $AB$  este bisectoarea unghiului  $xOy$ .

În adevăr, mediatoarea coardei  $AB$  împarte arcul  $AB$  și deci și unghiul la centru în două părți egale (fig. 133).

**Construcția unei drepte paralele cu o dreaptă dată.** Fie dreapta  $d$  și  $A$  un punct exterior (fig. 134, a).

Din  $A$  ducem  $AB \perp d$  și tot din  $A$  ducem dreapta  $a \perp AB$ . Dreptele  $a$  și  $d$  fiind perpendiculare pe aceeași dreaptă sînt paralele. Ținînd seama de criteriile de para-

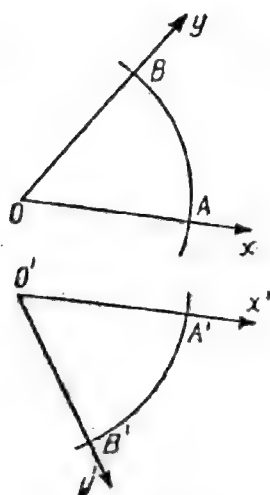


Fig. 132

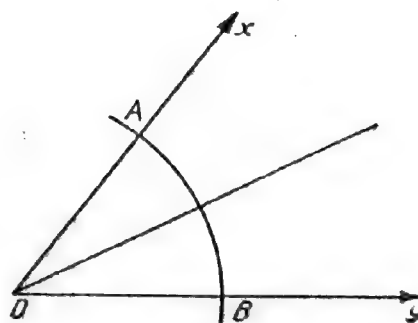


Fig. 133

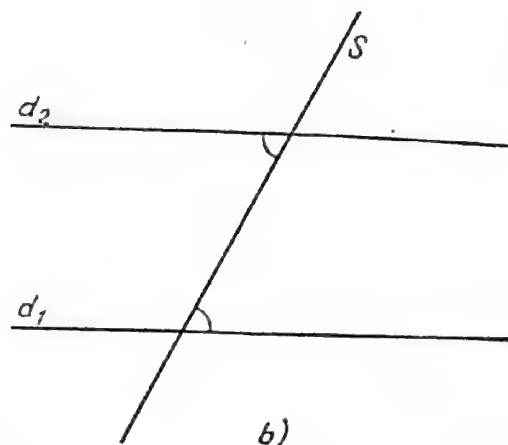
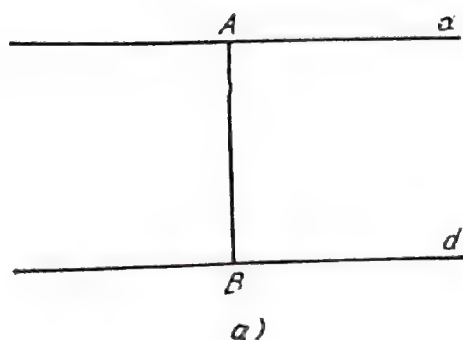


Fig. 134

lelism date de teorema relativă la dreptele care formează cu o secantă unghiuri alterne interne egale, putem duce o dreaptă  $\delta$  care să formeze cu  $d_1$  și  $d_2$  unghiuri alterne interne egale (fig. 134, b). O altă metodă de a construi o paralelă la o dreaptă dată se bazează pe translație.

Prin translație toate punctele unei figuri descriu segmente de dreaptă paralele, egale și îndreptate în același sens.

Practic pentru a desena o dreaptă paralelă la o dreaptă dată printr-un punct exterior, așezăm echerul cu una din laturi pe dreapta dată apoi așezăm rigla pe o altă latură a echerului și facem echerul să alunece pe riglă pînă cînd latură echerului, care a fost așezată pe dreaptă, trece prin punctul exterior.

Pentru a desena o perpendiculară pe o dreaptă dintr-un punct exterior așezăm echerul cu o catetă pe dreapta dată și așezăm de-a lungul ei o riglă pe care facem să alunece echerul pînă cînd cealaltă catetă trece prin punctul exterior.

### Împărțirea unui segment într-un număr de părți egale

Fiind dat un segment  $AB$ , pentru a-l împărți în  $n$  părți egale ducem printr-o extremitate a segmentului (de exemplu  $A$ ) o semidreaptă pe care luăm, începînd din  $A$ ,  $n$  segmente egale (fig. 135). Unim punctul  $B$  cu ultimul punct de diviziune notat cu  $L$ . Prin celelalte puncte de diviziune ducem paralele la  $BL$ . Aceste paralele determină pe segmentul  $AL$   $n$  părți egale deci vor împărți și segmentul  $AB$  în  $n$  părți egale între ele.

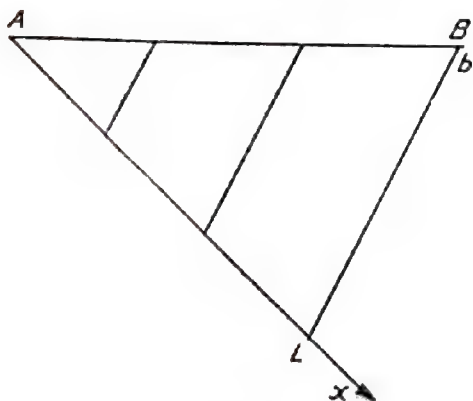


Fig. 135

### Împărțirea unui segment într-un raport dat.

Pentru a găsi punctul  $M$ , din interiorul segmentului, care împarte segmentul  $AB$  într-un raport dat  $\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}$  ( $m$  și  $n$  numere naturale), împărțim segmentul  $AB$  în  $m + n$  părți egale apoi prin punctul care marchează a  $m$ -a diviziune pornind din  $A$ , ducem o paralelă la dreapta care unește punctul  $B$  cu ultimul punct de diviziune. Acest punct există totdeauna și este unic pentru un raport dat.

Pentru a găsi punctul  $M'$ , aflat pe prelungirea segmentului  $AB$  astfel ca  $\frac{M'A}{M'B} = \frac{m}{n}$ .

judcăm astfel: dacă segmentul  $M'A$  are  $m$  părți egale atunci segmentul  $M'B$  are  $n$  asemenea părți deci segmentul  $AB$  are  $(m-n)$  sau  $(n-m)$  părți egale după cum  $m-n > 0$  sau  $m-n < 0$ .

Împărțim deci segmentul  $AB$  în  $m-n$  sau  $n-m$  părți egale și luăm punctul  $M'$  astfel încât  $M'A$  să aibă  $m$  asemenea părți.

De exemplu, să se găsească punctul care împarte segmentul  $AB$  în raportul  $\frac{3}{7}$ .

Fie segmentul dat  $AB$ . Pentru a găsi punctul  $M$  interior segmentului, împărțim segmentul  $AB$  în 10 părți.

Împărțim segmentul  $AB$  în zece părți egale (fig. 136). Luând pe semidreapta  $Ax$  10 segmente egale notăm cu  $C$  extremitatea celei de a treia diviziune și cu  $D$  ultimul punct de diviziune. Prin  $C$  ducem  $CM \parallel DB$ ; punctul  $M$  împarte segmentul  $AB$  în raportul  $\frac{3}{7}$ .

Pentru punctul  $M'$  exterior, împărțim pe  $AB$  în  $7-3 = 4$  părți egale. Fie  $AA'$  una din aceste părți (fig. 137). Segmentul  $M'A$  este egal cu  $3AA'$ . Deci pe prelungirea segmentului  $BA$  de la  $A$  spre stânga luăm segmentul  $M'A = 3AA'$ . Atunci  $M'B = 3AA' + 4AA' = 7AA'$ .

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{3}{7}.$$

Dacă raportul  $\frac{m}{n}$  este supraunitar punctul  $M'$  se află pe prelungirea segmentului  $AB$  la dreapta punctului  $B$ .

**Construcția unui segment care să formeze o proporție cu trei segmente date (Al patrulea proporțional cu trei segmente date).**

Fie  $a, b, c$  cele trei segmente date. Se cere să aflăm un segment  $x$  astfel ca

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{x}.$$

Pe baza teoremei lui Tales putem face următoarea construcție:

1) Luăm două semidrepte  $Ox$  și  $Oy$ . Pe  $Ox$  așezăm cap la cap pornind din  $O$  (fig. 138) segmentele  $a = OA$  și  $c = AC$ , pe  $Oy$  așezăm pornind din  $O$  segmentul  $b = OB$ . Unim  $A$  cu  $B$  și prin  $C$  ducem  $CD \parallel AB$ . Segmentul  $x$  este segmentul  $BD$ .

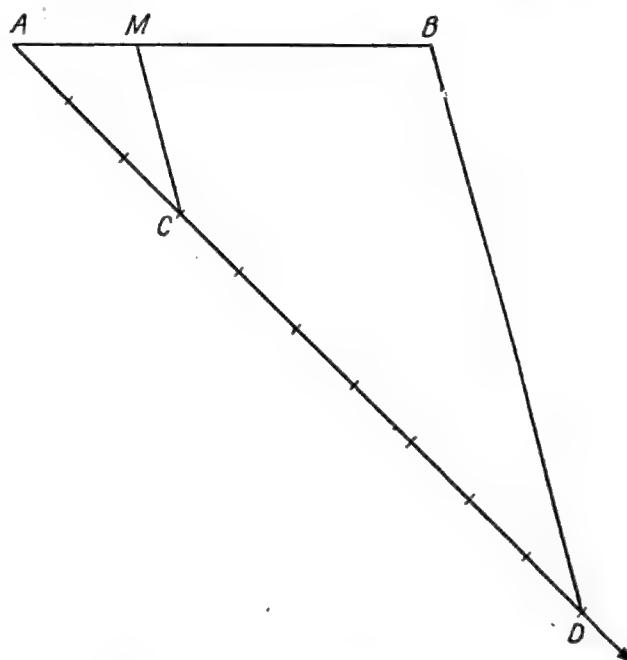


Fig. 136

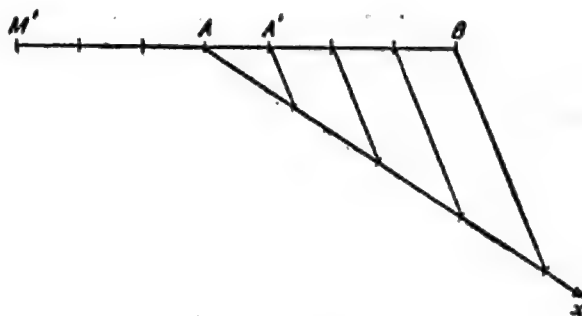


Fig. 137

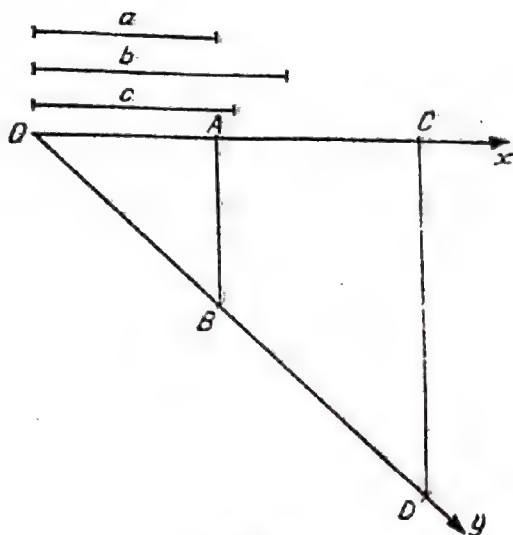


Fig. 138

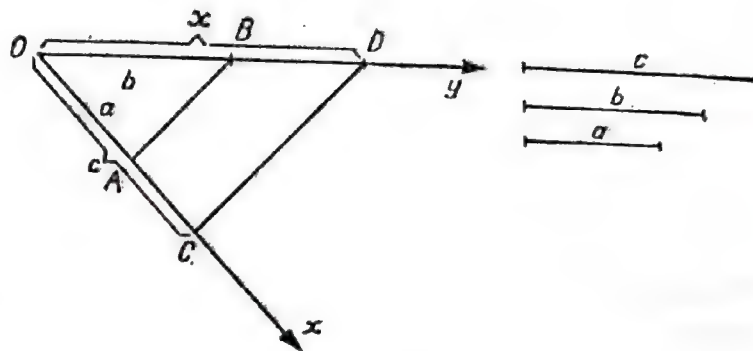


Fig. 139

În adevăr, teorema lui Tales ne dă:

$$\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{x}.$$

*Observare.* Pentru a construi segmentul  $x$  putem folosi și altă formă a teoremei lui Tales. De exemplu dacă  $c > a$  luăm pe  $Ox$ ,  $OC = c$  și  $OA = a$ ; pe  $Oy$ ,  $OB = b$  apoi prin  $C$  ducem  $CD \parallel AB$ . Segmentul  $OD = x$  (fig. 139)

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{x}; \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{x}.$$

*Construcția unui segment medie proporțională între două segmente date.* Fiind date două segmente  $a$  și  $b$  trebuie să construim un segment  $x$  astfel ca  $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ .

Vom aplica fie teorema catetei, fie teorema înălțimii într-un triunghi dreptunghic. Relațiile metrice în triunghiul dreptunghic ne conduc, în cerc, la două teoreme analoge.

1° O coardă este medie proporțională între diametrul cercului și proiecția coardei pe diametrul care trece printr-o extremitate a coardei (teorema catetei).

2° Segmentul din perpendiculara dusă dintr-un punct al cercului pe un diametru, limitat la diametru, este medie proporțională între segmentele determinate pe diametru (teorema înălțimii).

Aplicând 1°, dacă  $a > b$  construim cercul de diametru  $AB = a$  (fig. 140, a). Pe diametrul  $AB$  se ia  $AC = b$ , iar în  $C$  ducem  $CD \perp AB$ .

Segmentul  $AD$  (catetă în triunghiul dreptunghic  $ADB$ ) este medie proporțională între ipotenuză ( $AB = a$ ) și proiecția ei pe ipotenuză ( $AC = b$ ):  $AD^2 = AC \cdot AB$ ,  $x^2 = ab$ ,  $x = \sqrt{ab}$ .

Aplicând 2°, construim cercul de diametru  $AB = a + b$  (fig. 140, b). În extremitatea  $C$  a segmentului  $AC = a$ , ducem  $CD \perp AB$ ,  $CD$  este medie proporțională între segmentele  $AC$  și  $CB$ , deci

$$CD^2 = AC \cdot CB, \quad x = \sqrt{ab}.$$



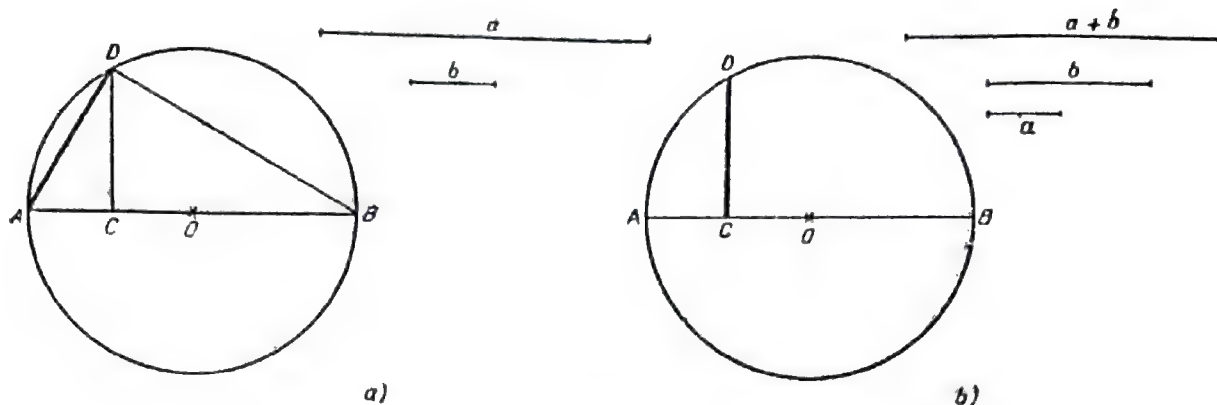


Fig. 140

## Construcția triunghiului

Să se construiască un triunghi când se dau:

- 1) o latură și unghiurile alăturate;
- 2) două laturi și unghiul cuprins între ele;
- 3) cele trei laturi.

1) Dându-se un segment  $a$  și două unghiuri  $\beta, \gamma$  vom construi triunghiul  $ABC$  în care  $BC = a$ ,  $\hat{B} = \beta$ ,  $\hat{C} = \gamma$ . Construim un segment  $BC = a$  (fig. 141); în  $B$  și  $C$  construim de aceeași parte a lui  $BC$  respectiv unghiurile  $\beta$  și  $\gamma$ , ducând semidreptele  $Bx$  și  $Cy$  care se întâlnesc într-un punct  $A$  cel de al treilea vîrf al triunghiului.

Punctul  $A$  există dacă  $\beta + \gamma < 2 \text{ dr.}$

2) Dându-se două segmente  $b, c$  și un unghi  $\alpha$ , vom construi triunghiul  $ABC$  în care  $AC = b$ ,  $AB = c$  și  $\hat{A} = \alpha$ .

Construim segmentul  $AC = b$  (fig. 142). Cu vîrfurile în  $A$  construim  $\hat{CAy} = \alpha$ . Pe  $Ay$  luăm punctul  $B$  astfel ca  $AB = c$ . Triunghiul  $ABC$  este triunghiul cerut. Putem găsi două puncte  $B$  și  $B'$  construind unghiurile egale  $\hat{CAy}$  și  $\hat{CAy'}$  de o parte și de alta a semidreptei  $AC$ . Triunghiurile obținute sînt egale.

3) Dându-se trei segmente  $a, b, c$ , vom construi triunghiul  $ABC$  în care  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ .

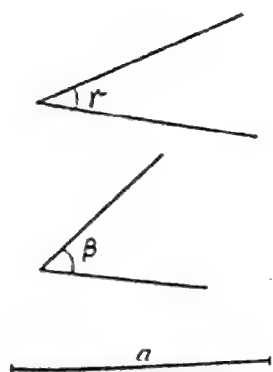


Fig. 141

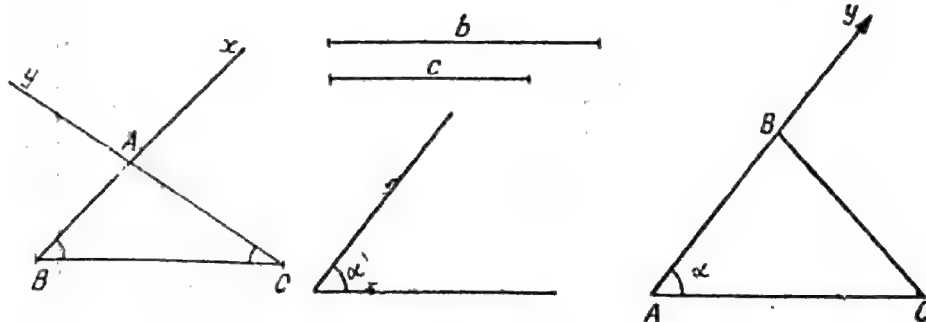


Fig. 142

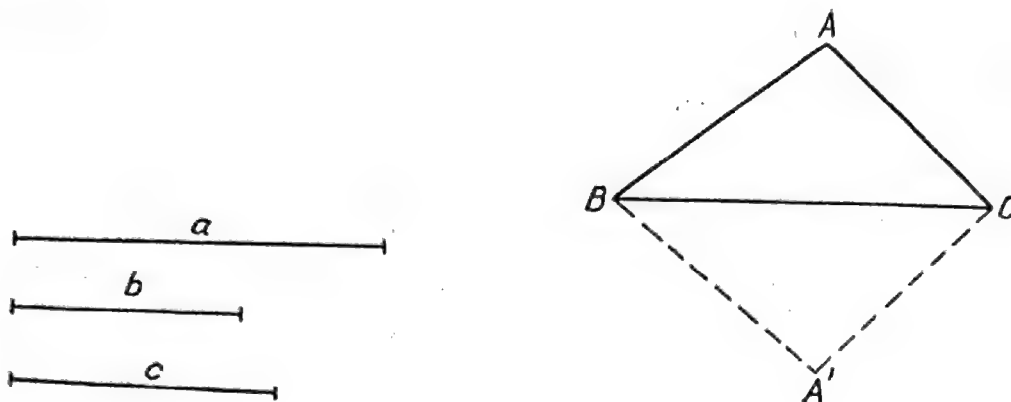


Fig. 143

Construim segmentul  $BC = a$  (fig. 143) și din  $B$  și  $C$ , ca centre, ducem cercurile cu razele respectiv  $c$  și  $b$ . Cele două cercuri se întâlnesc în cel mult două puncte. Vom găsi deci cel mult două puncte  $A$  și  $A'$  ca al treilea vîrf al triunghiului cerut. Cele două puncte  $A$  și  $A'$  fiind pe coarda comună a celor două cercuri, sînt simetrice față de  $BC$ , deci cele două triunghiuri sînt egale. Dacă cele două cercuri au numai un punct comun, el se găsește pe dreapta centrelor celor două cercuri deci  $b + c = a$ ; punctul  $A$  este situat pe  $BC$  deci nu putem construi triunghiul. Dacă cele două cercuri nu au nici un punct comun, atunci cu cele trei segmente nu se poate construi un triunghi.

Deci condiția necesară și suficientă ca să se poată construi un triunghi cu trei segmente date este ca fiecare din ele să fie mai mic decît suma celorlalte două.

În practică pentru a determina cel de al treilea vîrf al triunghiului nu ducem cercuri ci arce de cerc.

### Construcția triunghiurilor dreptunghice

Să se construiască un triunghi dreptunghic cunoscînd:

- 1) o catetă și unghiul ascuțit alăturat catetei;
- 2) catetele;
- 3) ipotenuza și un unghi ascuțit;
- 4) ipotenuza și o catetă.

1) Fiind dată cateta  $AB = b$  și unghiul  $B = \beta$  (fig. 144), construim un segment egal cu segmentul  $b$  apoi din  $B$  ducem semidreapta  $Bx$  care să formeze cu  $BA$  un unghi egal cu  $\beta$ . Din  $A$  ducem perpendiculara care intersectează pe  $Bx$  în  $C$ . Triunghiul  $ABC$  are cateta  $AB = b$  și  $\hat{B} = \beta$ .

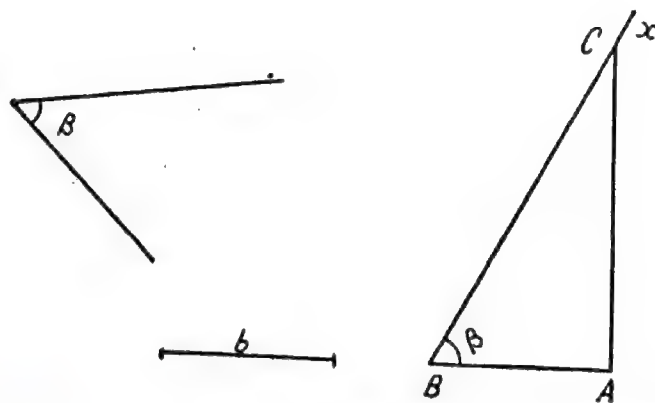


Fig. 144

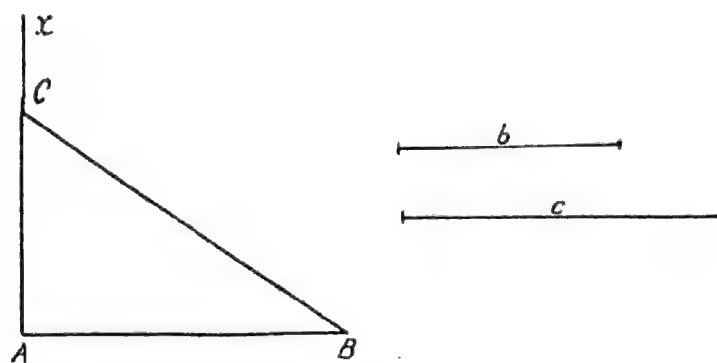


Fig. 145

2) Fiind date catetele  $AB = c$ ,  $AC = b$  (fig. 145), construim segmentul  $AB = c$ . În  $A$  ducem  $Ax \perp AB$  și luăm pe  $Ax$ ,  $AC = b$ . Triunghiul  $ABC$  are catetele egale cu  $b$  și  $c$ .

3) Fiind dată ipotenuza  $BC = a$  și un unghi ascuțit  $\hat{B} = \beta$  (fig. 146), construim ipotenuza  $BC$  și din  $B$  ducem o semidreaptă  $Bx$  care face cu  $BC$  un unghi  $\widehat{CBx} = \beta$ .

Din  $C$  ducem  $CA \perp Bx$ . Triunghiul  $ABC$  are ipotenuza egală cu  $a$  și  $\hat{B} = \beta$ .

4) Fiind dată ipotenuza  $BC = a$  și cateta  $AB = c$  (fig. 147), construim cateta  $AB = c$ . Din punctul  $A$  ducem  $Ax \perp AB$ . Cu centrul în  $B$  și raza  $r = a$  ducem un arc de cerc care taie pe  $Ax$  în  $C$ . Triunghiul  $ABC$  este dreptunghic ( $A = 90^\circ$ ),  $BC = a$  și  $AB = c$ .

Fig. 146

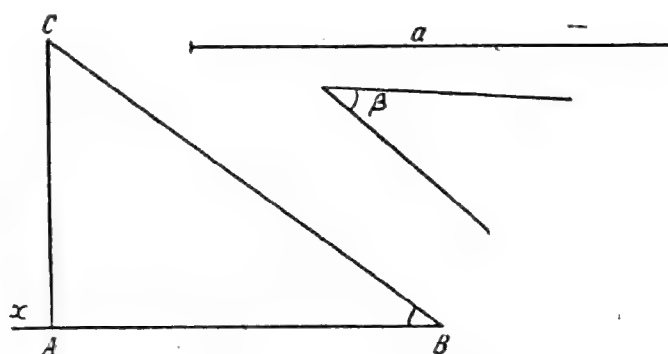
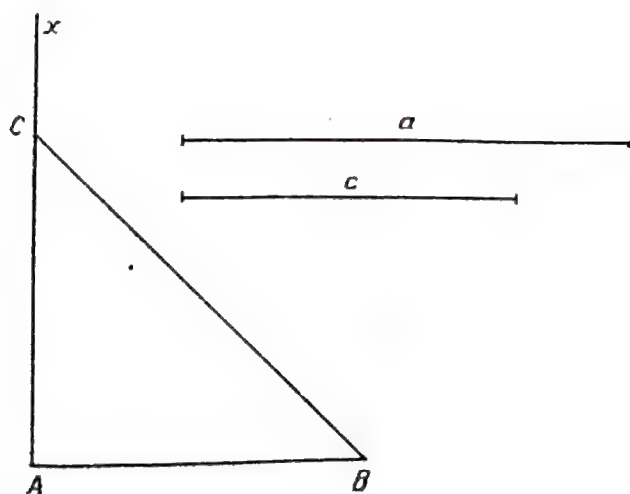


Fig. 147



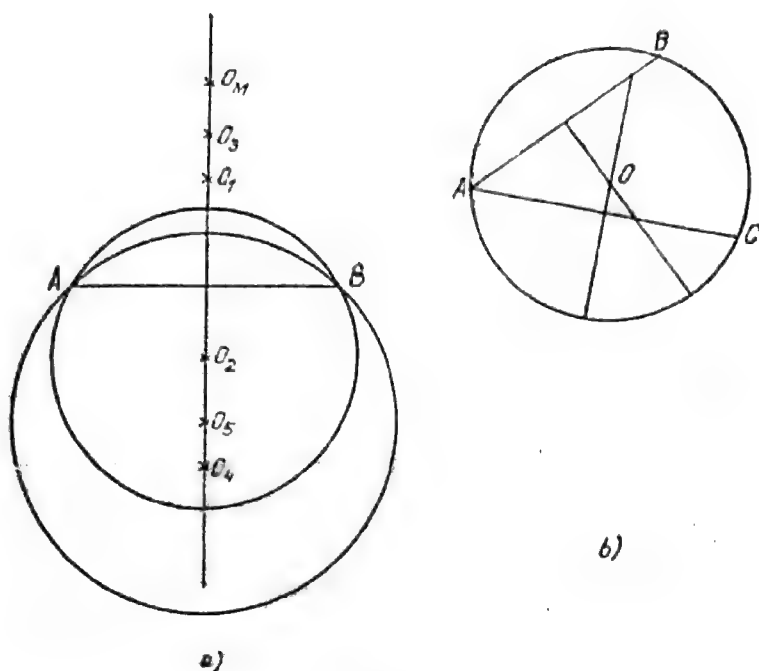


Fig. 148

### Construcția cercului

Să se construiască un cerc care să treacă;

- prin două puncte date;
- prin trei puncte date;
- printr-un punct dat și să fie tangent la o dreaptă într-un punct dat;
- printr-un punct dat și să fie tangent la un cerc dat într-un punct dat al cercului.

a) Prin două puncte date putem construi o infinitate de cercuri cu centrul pe mediatoarea segmentului determinat de cele două puncte (fig. 148, a).

b) Prin trei puncte date  $A, B, C$ , trece un singur cerc cu centrul în punctul  $O$ , in-

tersecția mediatoarelor a două din segmentele determinate de cele trei puncte luate câte două, și raza  $OA = OB = OC$  (fig. 148, b).

c) Fiind dată o dreaptă  $a$  un punct  $A$  pe dreaptă și un punct  $M$  exterior dreptei (fig. 149, a) centrul cercului este la intersecția mediatoarei segmentului  $AM$  (coardă în cerc) cu perpendiculara în  $A$  pe  $a$  (direcția razei). Dacă  $M$  aparține dreptei  $a$  și este diferit de  $A$ , problema nu are soluție; dacă  $M$  se confundă cu  $A$  avem o infinitate de soluții (cercurile cu centrul pe perpendiculara în  $A$  pe  $a$ ).

Problema este totdeauna posibilă și are soluție unică dacă  $M$  nu aparține dreptei  $a$ .

d) Fiind dat un cerc  $O$ , un punct  $A \in O$  și un punct  $M \notin O$ , cercul  $C$ , pe care vrem să-l construim, va avea segmentul  $MA$  coardă iar tangenta în  $A$  va fi tangenta la cercul  $O$ . Deci punctul  $C$ , centrul cercului, va fi intersecția dreptei  $OA$  cu mediatoarea segmentului  $MA$  (fig. 149, b).

Cele două drepte nu se intersectează dacă sînt paralele:  $DC \parallel OA$ . Deci dacă  $M$  este pe tangenta în  $A$  la cercul  $O$ , problema nu are soluție. Dacă  $M$  este pe cercul  $O$

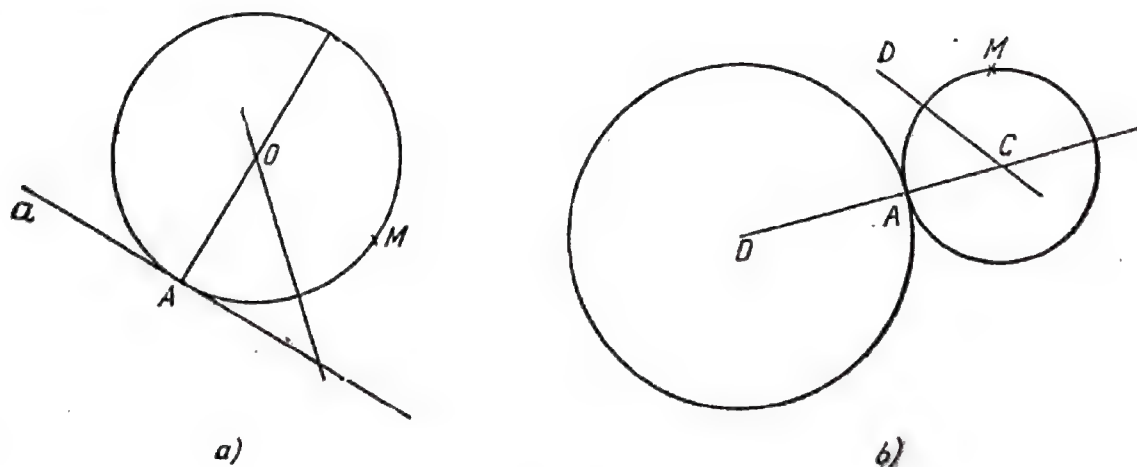


Fig. 149



și este diferit de  $A$  problema nu are soluție; dacă  $M$  se confundă cu  $A$  avem o infinitate de soluții.

În concluzie, problema are soluție unică dacă  $M$  nu aparține cercului  $O$  și tangentei în  $A$  la cercul  $O$ , are o infinitate de soluții dacă  $M$  se confundă cu  $A$ , nu are soluție dacă  $M \in O$  (dar  $M \neq A$ ) sau  $M$  aparține tangentei la cerc în  $A$ .

## Probleme de construcții

Pentru a rezolva o problemă de construcție vom căuta să reducem problema dată la una din problemele cunoscute pe baza relațiilor dintre elementele figurii pe care trebuie s-o construim. În acest scop considerăm problema rezolvată și cercetăm ce elemente ale figurii pot fi construite pe baza elementelor date.

### Exemple

1) Să se construiască un triunghi cunoscând o latură, un unghi alăturat acestei laturi și suma celorlalte două laturi.

Fiind date două segmente  $a$  și  $s$  ( $a < s$ ) și unghiul  $\beta$ , vom considera problema rezolvată. Fie triunghiul  $ABC$  în care  $a = BC$ ,  $\hat{B} = \beta$  și  $AB + AC = s$  (fig. 150).

Putem construi segmentul  $BC = a$  și semidreapta  $Bx$  care face cu  $BC$  un unghi egal cu  $\beta$ . Trebuie să mai determinăm vârful  $A$ . Pe schiță prelungim pe  $BA$  cu un segment  $AA' = AC$  și formăm triunghiul isoscel  $A'AC$ . Mediatoarea segmentului  $CA'$  (care poate fi construită) intersectează semidreapta  $Bx$  în punctul  $A$ .

Deci, pe semidreapta  $Bx$  luăm segmentul  $BA' = s$ , ducem mediatoarea segmentului  $CA'$  care intersectează pe  $Bx$  în  $A$ .

De la început am pus condiția  $a < s$  deci

$$BC < BA + AC.$$

Cu segmentele  $a, s$  și unghiul  $\beta < 2$  dr se poate construi un triunghi și numai unul (triunghiul simetric față de  $BC$  este egal cu el). Segmentul  $A'C$  are totdeauna o mediatoare și numai una. Mediatoarea segmentului  $CA'$  și semidreapta  $Bx$  au un singur punct comun căci sînt drepte diferite și nu pot fi paralele. Problema are totdeauna soluții dacă  $a < s$  și  $\beta < 2$  dr.

2) Să se construiască un trapez cînd se cunosc laturile trapezului.

Fiind date patru segmente  $a, b, c, d$ , vom considera problema rezolvată. Fie trapezul  $ABCD$  unde  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $DC = c$ ,  $DA = d$  ( $a > c$ ) și  $AB \parallel DC$  (fig. 151).

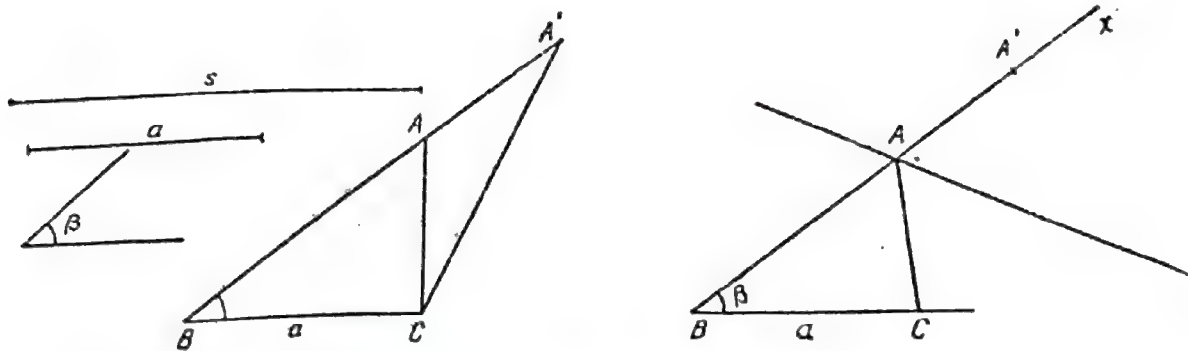


Fig. 150

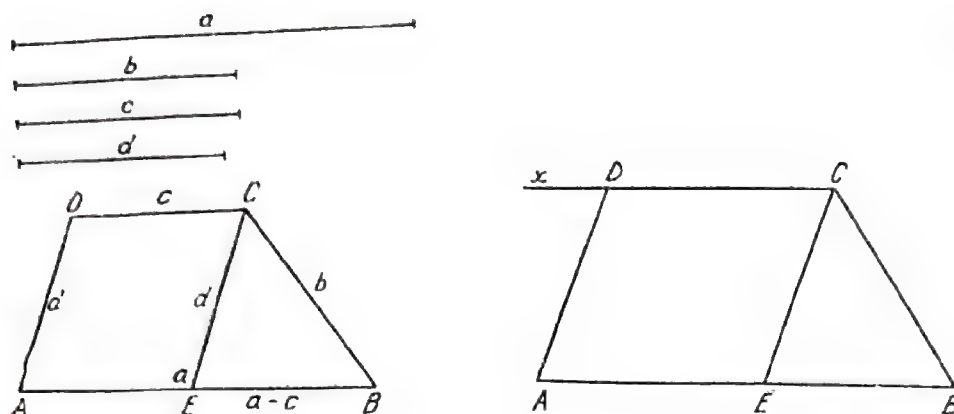


Fig. 151

Pe schiță se vede că ducând  $CE \parallel AD$  se formează triunghiul  $EBC$  în care  $CB = b$ ,  $CE = AD = d$ ,  $EB = AB - AE = a - c$ .

Triunghiul poate fi construit dacă  $a - c < d + b$  și  $a - c > |d - b|$ .

Construim triunghiul  $EBC$  cu laturile  $CE = d$ ,  $CB = b$ ,  $EB = a - c$ .

Pe semidreapta  $BE$  luăm pornind din  $B$  segmentul  $BA = a$ . Prin  $C$  ducem  $Cx \parallel AB$ . Pe semidreapta  $Cx$  luăm  $CD = c$ . Patrulaterul  $ABCD$  este trapezul cerut.

3) Să se construiască un paralelogram cunoscând cele două diagonale și unghiul format de ele.

Considerăm problema rezolvată. Fie  $ABCD$  paralelogramul care are diagonalele date  $AC = d_1$ ,  $DB = d_2$  și  $\widehat{AOB} = \alpha$  (fig. 152). Pe schiță se vede că ducând  $CE \parallel DB$ , se formează triunghiul  $ACE$  în care sînt date:  $AC = d_1$ ,  $CE = d_2$  și  $\widehat{ACE} = \alpha$ . Triunghiul  $ACE$  poate fi construit totdeauna dacă  $\alpha < 2$  dr. Prin  $C$  ducem  $Cx \parallel AB$ . Segmentul  $AC$  fiind diagonală în paralelogram, centrul paralelogramului este în  $O$ , mijlocul segmentului  $AC$ . Din  $O$  ca centru, cu raza  $OB = OD = \frac{d_2}{2}$ , ducem arce de cerc care taie  $AE$  și  $x$  respectiv în  $B$  și  $D$ ;  $ABCD$  este paralelogramul cerut. Problema este totdeauna posibilă și are o singură soluție.

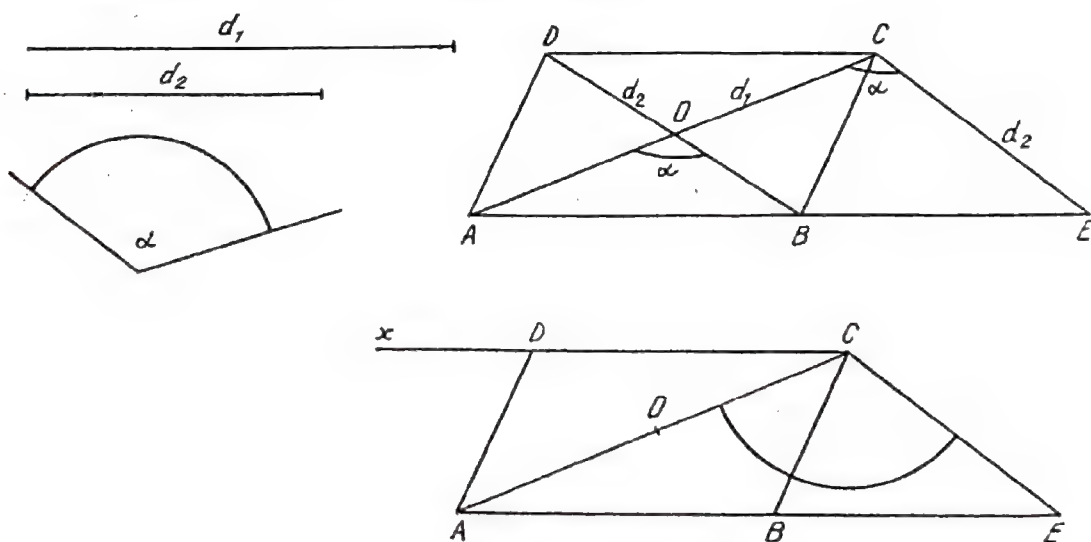


Fig. 152

## VIII

### Arii și volume

Aria unei porțiuni de suprafață plană este un număr pozitiv care indică de câte ori se cuprinde unitatea de măsură aleasă în suprafața considerată.

Ne vom referi în cele ce urmează la aria unui poligon.

— Două poligoane egale au ariile egale.

— Două poligoane având cel puțin o latură sau o porțiune de latură comună, fără puncte interioare comune, formează un poligon a cărui arie este egală cu suma ariilor celor două poligoane.

— Pătratul cu latura 1 are aria 1.

Se utilizează ca unitate de măsură pentru suprafețe metrul pătrat ( $m^2$ ) adică pătratul cu latura de 1 m.

Poligoanele cu ariile egale le numim *echivalente*.

**Aria dreptunghiului.** Aria dreptunghiului cu dimensiunile  $a$  și  $b$  (fig. 153) se calculează cu formula

$$S = b \cdot a$$

**Aria pătratului.** Pătratul fiind dreptunghiul cu laturile egale, vom avea

$$S = l^2 \quad (l \text{ este latura pătratului}).$$

**Aria paralelogramului.** Fie paralelogramul  $ABCD$  (fig. 154). Ducem înălțimile  $AA'$  și  $BB'$ . S-au format triunghiurile egale  $ADA'$  și  $BCB'$  ( $AD = BC$  și  $AA' = BB'$ ). Paralelogramul este echivalent cu dreptunghiul  $AA'B'B$  care are aceeași bază și aceeași înălțime. În adevăr,  $S_{ABCD} = S_{ABB'D} + S_{BCB'}$ ,  $S_{ABB'A} = S_{ABB'D} + S_{ADA'}$ . Dar  $S_{ADA'} = S_{BCB'}$  deci:  $S_{ABCD} = S_{ABB'A}$

$$S = bi$$

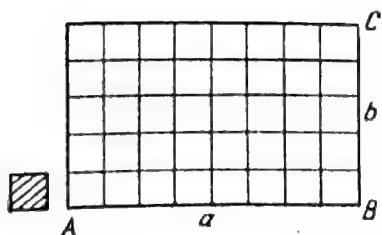


Fig. 153

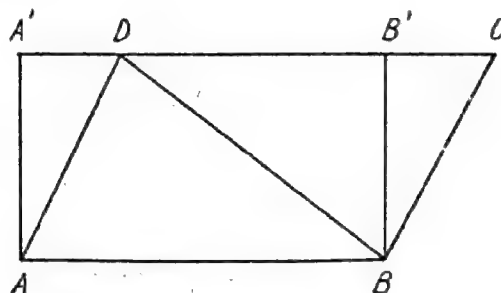


Fig. 154

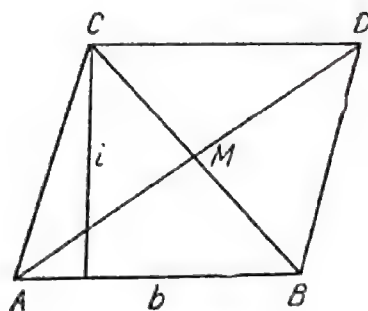


Fig. 155

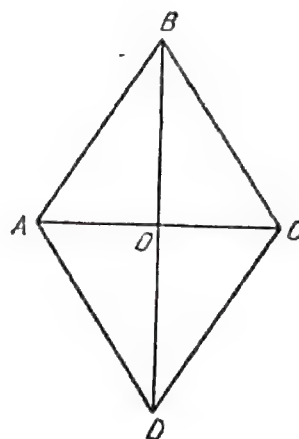


Fig. 156

**Aria triunghiului.** Fie triunghiul  $ABC$  și notăm cu  $D$  simetricul vârfului  $A$  în raport cu mijlocul segmentului  $BC$  (fig. 155). Patrulaterul  $ABCD$ , care are un centru de simetrie, intersecția diagonalelor, este paralelogram și  $\triangle ABC = \triangle BCD$ . Aria triunghiului  $ABC$  este deci jumătate din aria paralelogramului care are ca bază, o latură a triunghiului și ca înălțime, înălțimea triunghiului.

Așadar, aria triunghiului este

$$S = \frac{bi}{2}.$$

**Observare.** Dacă triunghiul este dreptunghic aria lui este semiprodusul dintre ipotenuză și înălțimea relativă la ipotenuză sau semiprodusul catetelor. Regăsim relația cunoscută de la relațiile metrice: produsul dintre ipotenuză și înălțimea relativă la ipotenuză este egal cu produsul catetelor.

Rombul fiind un paralelogram, aria este

$$S = \frac{bi}{2}.$$

Ținând seama că diagonalele rombului sînt perpendiculare, aria este egală cu dublul ariei unuia din triunghiurile isoscele formate de o diagonală a rombului (fig. 156).

Aria rombului este deci și semiprodusul diagonalelor:

$$S = \frac{d_1 d_2}{2}$$

unde  $d_1$  și  $d_2$  sînt cele două diagonale.

Aceeași formulă o vom folosi la orice patrulater convex cu diagonalele perpendiculare (fig. 157).

În adevăr,  $S = S_{ABO} + S_{ACD}$ ,

$$S = \frac{AC \cdot BO}{2} + \frac{AC \cdot OD}{2} = \frac{AC}{2} (BO + OD).$$



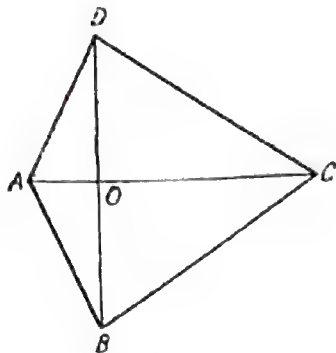


Fig. 157

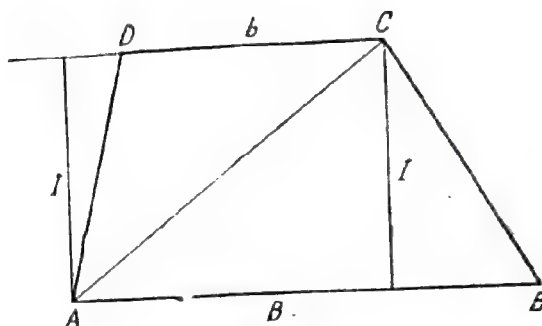


Fig. 158

$S = \frac{AC \cdot BD}{2}$  sau notind diagonalele  $AC$  și  $BD$  cu  $d_1$  respectiv  $d_2$  avem  $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ .

**Aria trapezului.** Notind cu  $b, B$  bazele trapezului iar cu  $I$  înălțimea, aria este dată de formula

$$S = I \cdot \frac{b + B}{2}$$

În adevăr, ducând diagonala  $AC$  (fig. 158),  $S = S_{ABC} + S_{ADC}$ .

$$S = \frac{AB \cdot I}{2} + \frac{DC \cdot I}{2}; \quad S = \frac{I}{2} (AB + DC),$$

$$S = I \cdot \frac{b + B}{2}$$

**Aria unui poligon regulat.** Notind cu  $P$  perimetrul și cu  $a$  apotema, aria este dată de formula

$$S = \frac{P \cdot a}{2}$$

Se știe că un poligon regulat poate fi înscris într-un cerc. Fie  $O$  centrul acestui cerc, raza  $R$ , iar  $l$ , latura poligonului.

Perpendiculara din  $O$  pe o latură a poligonului este raza cercului înscris în poligon sau apotema poligonului. Unind  $O$  cu vîrfurile poligonului regulat cu  $n$  laturi, obținem  $n$  triunghiuri egale, cu baza o latură  $l$  a poligonului și înălțimea, apotema  $a$  a poligonului (fig. 159).

$$S = n \cdot \frac{l \cdot a}{2}. \text{ Dar } nl = P \text{ deci}$$

$$S = \frac{P \cdot a}{2}$$

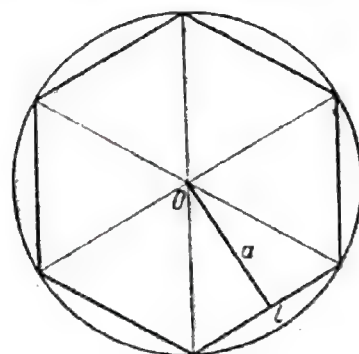


Fig. 159

În cazul triunghiului echilateral  $l_3 = R\sqrt{3}$ ,  $a_3 = \frac{R}{2}$ .

$$S = \frac{3R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \text{ sau } S = \frac{3\sqrt{3} \left(\frac{l_3}{\sqrt{3}}\right)^2}{4} = \frac{\sqrt{3}l_3^2}{4}.$$

În cazul hexagonului regulat  $l_6 = R$ ,  $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ .

$$S = \frac{6R \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2} \text{ sau } S = \frac{3\sqrt{3}l_6^2}{2}.$$

*Observare.* Aria hexagonului regulat este egală cu de două ori aria triunghiului echilateral înscris în același cerc.

*Aria unui poligon oarecare* se află împărțind poligonul în poligoane a căror arie știm s-o calculăm (triunghiuri, paralelamente, trapeze etc.).

### Lungimea și aria cercului

Poligoanele regulate cu același număr de laturi sînt asemenea; raportul perimetrelor lor este egal cu raportul razelor cercurilor circumscrise și egal cu raportul de asemănare:

$$\frac{p}{p'} = \frac{l}{l'} = \frac{R}{R'} \text{ sau } \frac{p}{R} = \frac{p'}{R'}.$$

Dacă avem un poligon regulat cu  $n$  laturi înscris în cerc, putem obține un poligon regulat cu  $2n$  laturi prin ducerea razelor perpendiculare pe fiecare latură a poligonului (fig. 160). Repetind operația obținem un poligon cu  $2^2n$ ,  $2^3n$ ,  $2^4n$  laturi ș.a.m.d. Poligoanele obținute, cu laturile din ce în ce mai mici, se apropie din ce în ce de cercul circumscris. Dacă numărul laturilor poligonului este foarte mare, perimetrul lui aproximează lungimea cercului. Dacă avem două cercuri cum ele sînt totdeauna asemenea din:

$$\frac{p}{R} = \frac{p'}{R'} \text{ putem scrie: } \frac{L}{2R} = \frac{L'}{2R'}$$

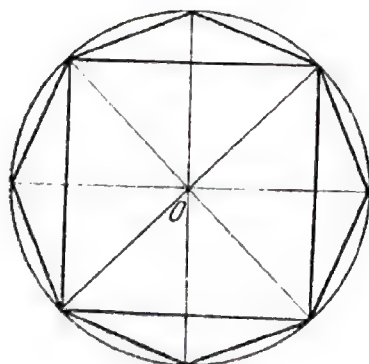


Fig. 160

unde am notat cu  $L$  și  $L'$  lungimile celor două cercuri.

Raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul lui este constant. Acest număr constant, care nu este un număr rațional, îl notăm cu  $\pi$  și luăm ca valoare aproximativă  $\pi = 3,14$  sau  $\pi = 3,1416$ .  $\pi$  este un număr zecimal neperiodic, cu un număr infinit de zecimale. Pentru calculele noastre este suficient să luăm  $\pi = 3,14$ . Valoarea lui  $\pi$  cu mai multe zecimale este

$$\pi = 3,141592653...$$

Lungimea cercului este  $L = 2\pi R$ .

Pentru a calcula lungimea unui arc de cerc corespunzător unghiului la centru de  $n^\circ$  (fig. 161) judecăm astfel:

Lungimea unui semicerc este  $\pi R$  deci

la  $180^\circ$  corespunde lungimea  $\pi R$ ,

la  $n^\circ$  corespunde lungimea  $\frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ$ .

$$l_{\text{arc}} = \frac{\pi R}{180} \cdot n$$

**Aria cercului.** Aproximăm aria cercului cu aria unui poligon regulat cu un număr foarte mare de laturi, înscris în cerc prin formula  $S = \frac{p \cdot a}{2}$ . Perimetrul devine lungimea cercului iar apotema raza cercului.

$$A_{\text{cerc}} = \frac{2\pi R^2}{2};$$

$$A_{\text{cerc}} = \pi R^2.$$

**Aria sectorului de cerc și a segmentului de cerc.**

Aria sectorului de cerc de  $n^\circ$  (fig. 161) se calculează, astfel: aria unui sector care corespunde la  $360^\circ$  este aria cercului, deci

$$360^\circ \dots \dots \pi R^2$$

$$n^\circ \dots \dots \frac{\pi R^2}{360} \cdot n$$

$$A_{\text{sect.}} = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

**Aria segmentului de cerc** se calculează scăzând din aria sectorului corespunzător aria triunghiului format de cele două raze care unesc centrul cu extremitățile segmentului și coarda segmentului de cerc (fig. 162).

$$S_{\text{seg.}} = S_{\text{sect.}} - S_{AOB}.$$

**Aria coroanei circulare** (porțiunea dintre două cercuri concentrice de raze  $R_2$  și  $R_1$ ) este  $S_c = \pi (R_2^2 - R_1^2)$ .

### Aplicație

Fiind dat un cerc de rază  $R$  și triunghiul echilateral  $ABC$  înscris în el, să se calculeze aria segmentului de cerc mai mic determinat de o latură a triunghiului.

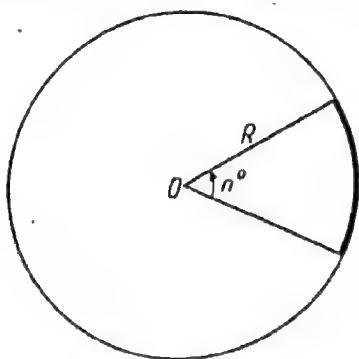


Fig. 161

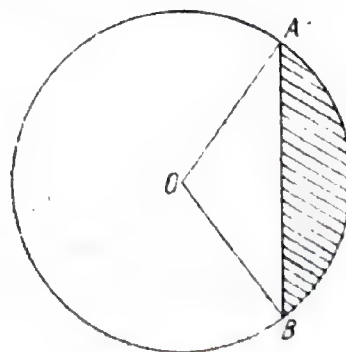


Fig. 162

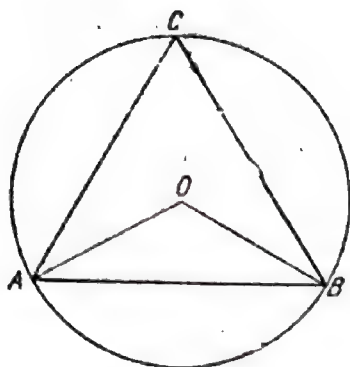
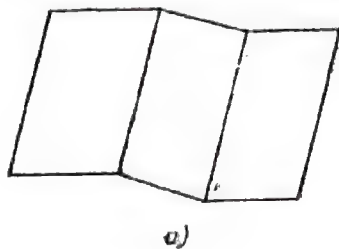
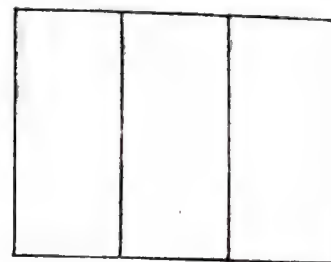


Fig. 163



a)



b)

Fig. 164

Latura triunghiului echilateral subîntinde un arc de  $120^\circ$  (fig. 163)

$$A_{\text{seg. AB}} = A_{\text{sect. OAB}} - A_{\text{OAB}}$$

$$A_{\text{seg. AB}} = \frac{\pi R^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} - \frac{l_3 \cdot a_3}{2} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3} R^2}{4}.$$

$$A_{\text{seg. AB}} = \frac{R^2}{12} (4\pi - 3\sqrt{3}) \approx \frac{R^2}{12} (12,56 - 5,19).$$

$$A_{\text{seg.}} \approx \frac{7,37}{12} R^2 \approx 0,61 R^2.$$

În acest caz se putea calcula mai simplu aria segmentului observînd că, dacă scădem din aria cercului aria triunghiului echilateral, obținem de 3 ori aria unui segment de cerc.

$$A_{\text{seg.}} = \frac{1}{3} \left( \pi R^2 - \frac{3\sqrt{3} R^2}{4} \right) = \frac{R^2}{12} (4\pi - 3\sqrt{3}).$$

Aria laterală a prisme este egală cu suma ariilor fețelor laterale  $S_l = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ .

Dacă desfășurăm suprafața laterală a unei prisme oblice cu baza un poligon regulat pe un plan, obținem o figură formată din  $n$  paralelograme (fig. 164, a) care au laturile alipite egale. Dacă prisma este dreaptă, fețele laterale sînt dreptunghiuri care au aceeași înălțime deci, prin desfășurare, vom obține un dreptunghi cu baza egală cu perimetrul bazei prisme și cu înălțimea egală cu înălțimea prisme (fig. 164, b).

Aria laterală a unei prisme drepte este egală cu produsul dintre perimetrul bazei și înălțimea prisme.

$$S_l = P \cdot I$$

Aria totală a prisme este egală cu aria laterală a prisme plus ariile celor două baze  $S_t = S_l + 2B$  (cu  $B$  am notat aria unei baze).

Aria laterală a piramidei este egală cu suma ariilor fețelor laterale care sînt triunghiuri

$$S_b = S_1 + S_2 + \dots + S_n.$$



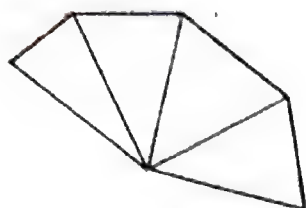


Fig. 165

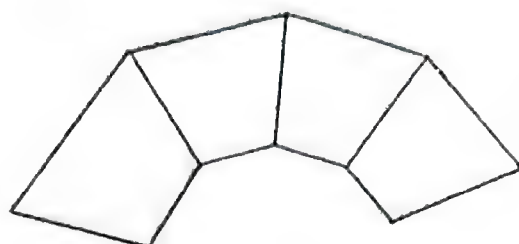


Fig. 166

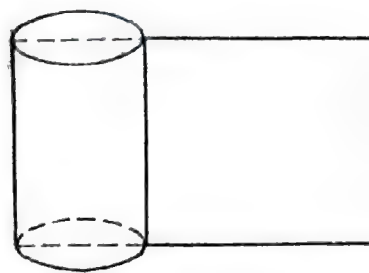


Fig. 167

Prin desfășurarea suprafeței laterale a unei piramide cu  $n$  fețe se obține un poligon format din  $n$  triunghiuri (fig. 165). Dacă piramida este regulată (are ca bază un poligon regulat și înălțimea cade în centrul poligonului de bază), atunci vom avea  $n$  triunghiuri egale. Deci:

$$S_b = n S_{VAB} = n \cdot \frac{AB \cdot VM}{2}$$

unde  $AB$  este latura poligonului de bază iar  $VM$  înălțimea unei fețe laterale deci apotema piramidei; dar  $n AB = P$  deci aria laterală a piramidei regulate este:

$$S_l = \frac{P \cdot A}{2}$$

unde am notat apotema piramidei cu  $A$  și perimetrul bazei cu  $P$ .

Aria totală este egală cu aria laterală plus aria bazei.

$$S_t = S_l + B.$$

Aria laterală a trunchiului de piramidă este egală cu suma ariilor fețelor laterale:

$$S_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

unde fețele laterale sînt trapeze.

Prin desfășurarea suprafeței laterale se obține un poligon format din  $n$  trapeze (fig. 166). Dacă trunchiul de piramidă este regulat, atunci trapezele sînt isoscele, egale și aria laterală este egală de  $n$  ori aria unui trapez:

$$S_l = n \cdot \frac{AB + A'B'}{2} \cdot h.$$

Notînd cu  $P, p$  perimetrele bazelor și cu  $A$  apotema trunchiului de piramidă, aria laterală a trunchiului de piramidă regulată este:

$$S_l = \frac{P + p}{2} \cdot A.$$

Aria totală se obține adunînd la aria laterală ariile celor două baze  $B$  și  $b$ :

$$S_t = S_l + B + b.$$

*Aria laterală a cilindrului circular drept.* Prin desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept se obține un dreptunghi care are înălțimea egală cu generatoarea cilindrului și baza egală cu lungimea cercului de bază (fig. 167). Deci

$$S_l = 2\pi R G.$$

Putem ajunge la aceeași formulă dacă considerăm cilindrul ca o prismă dreaptă cu aceeași înălțime în care numărul laturilor poligonului de bază (înscris în cerc) crește foarte mult.

$$S_l = P \cdot I$$

unde  $P = 2\pi R$  iar  $I = G$  (la cilindrul drept înălțimea este egală cu generatoarea), deci

$$S_l = 2\pi RG.$$

$$S_t = S_l + 2B, \quad S_t = 2\pi RG + 2\pi R^2 = 2\pi R(G + R).$$

**Aria laterală a conului circular drept.** Considerăm conul ca o piramidă cu vârful în vârful conului și cu baza un poligon regulat, înscris în cercul de bază, cu un număr foarte mare de laturi.

Aria laterală a piramidei regulate:  $S_l = \frac{P \cdot A}{2}.$

Aria laterală a conului:  $S_l = \frac{2\pi RG}{2};$

$$S_l = \pi RG.$$

(apotema a devenit generatoare).

Aria totală:  $S_t = \pi RG + \pi R^2 = \pi R(G + R).$

Prin desfășurarea suprafeței laterale a unui con se obține un sector de cerc care are lungimea arcului egală cu lungimea cercului de bază iar ca rază  $r$ , generatoarea  $G$  a conului (fig. 168). Aria laterală a conului este egală cu aria sectorului:

$$\pi RG = \frac{\pi G^2 n}{360}$$

de unde:

$$n^\circ = \frac{R \cdot 360^\circ}{G}.$$

### Aplicații

1) Să se determine raza  $R$  și generatoarea  $G$  a unui con format dintr-un sector circular cu raza  $r = 3$  cm și unghiul la centru  $\alpha = 120^\circ$ .

$$G = 3; \quad R = 3 \cdot \frac{120}{360}, \quad R = 1 \text{ cm.}$$

2) Să se afle unghiul la centru  $\alpha$  al sectorului obținut prin desfășurarea unui con circular drept cu lungimea cercului de bază  $6\pi$  și înălțimea  $I = 4$  cm.

Lungimea cercului de bază este egală cu lungimea arcului sectorului, generatoarea conului este egală cu raza sectorului.

$$2\pi r = 6\pi, \quad r = 3 \text{ cm}, \quad R = G = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ cm.}$$

$$\frac{\pi R n}{180} = 2\pi r.$$

$$n^\circ = 216^\circ.$$

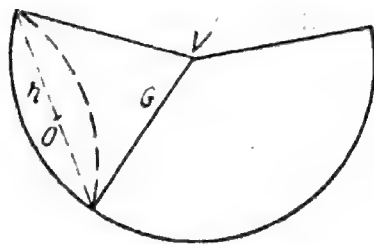


Fig. 168

**Aria laterală a trunchiului de con.** Trunchiul de con poate fi privit ca un trunchi de piramidă când numărul laturilor poligonului de bază crește foarte mult.

Formula ariei laterale a trunchiului de piramidă regulată:  $S_l = \frac{P+p}{2} A$  devine:

$$S_l = \frac{2\pi(R+r)}{2} G,$$

$$S_l = \pi G (R + r).$$

Prin desfășurarea unui trunchi de con se obține o porțiune dintr-o coroană circulară.

Aria totală a trunchiului de con:

$$S_t = \pi G (R + r) + \pi(R^2 + r^2).$$

Aria sferei este egală cu de patru ori aria unui cerc mare al sferei

$$S_{\text{sferă}} = 4\pi R^2.$$

**Aria unei zone sau a unei calote sferice.** Porțiunea din suprafața sferei cuprinsă între cercurile de secțiune obținute prin secționarea sferei cu două plane paralele se numește *zonă sferică*; dacă unul din plane este tangent la sferă, zona se numește *calotă* (fig. 169).

Aria zonei sau a calotei se află înmulțind lungimea unui cerc mare al sferei cu înălțimea zonei sau calotei. Înălțimea zonei (calotei) este distanța dintre cele două plane de secțiune  $O'O''$ .

## Volume

Volumul prisme (cilindrului) este produsul dintre aria bazei și înălțime.

$$V = B \cdot I \quad (\text{prismă}), \quad V = \pi R^2 \cdot I \quad (\text{cilindru}).$$

Volumul piramidei (conului) este a treia parte din volumul prisme (cilindrului) care are aceeași bază și aceeași înălțime cu piramida (conul).

$$V = \frac{B \cdot I}{3} \quad (\text{piramidă}), \quad V = \frac{\pi R^2 I}{3} \quad (\text{con}).$$

Volumul trunchiului de piramidă (con) se poate obține scăzând din volumul piramidei (conului), din care face parte trunchiul, volumul piramidei mici (conului mic) format prin secționare

$$V = V_1 - V_2, \quad V = \frac{BI}{3} - \frac{bi}{3}$$

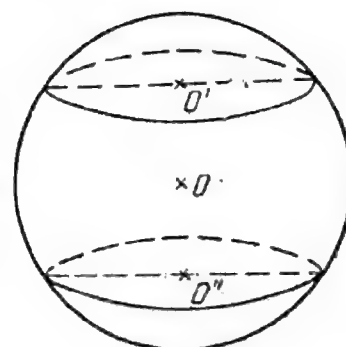


Fig. 169

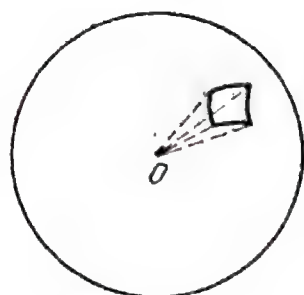


Fig. 170

sau prin formulele:

$$V = \frac{1}{3} (B + b + \sqrt{Bb}) \quad (\text{trunchiul de piramidă})$$

$$V = \frac{1}{3} \pi (R^2 + r^2 + Rr) \quad (\text{trunchiul de con})$$

Volumul sferei:  $V = \frac{4\pi R^3}{3}$

*Observare.* Ne putem imagina că am introdus în sferă foarte multe piramide cu vârful în centrul sferei și vîrfurile bazelor pe sferă (fig. 170). Aproximăm volumul sferei prin suma acestor piramide considerînd că suma bazelor este chiar aria sferei și înălțimea piramidelor egală cu raza sferei:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n \cdot V = \frac{R}{3} (S_1 + S_2 + \dots + S_n)$$

$$V = \frac{R}{3} \cdot 4\pi R^2,$$

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

## Aplicații

1) Să se afle raza cercului înscris într-un triunghi în funcție de laturile și aria triunghiului.

Ducînd bisectoarele  $AA'$ ,  $BB'$  și  $CC'$  care se întîlnesc în  $O$  (fig. 171), triunghiul  $ABC$  se împarte în trei triunghiuri cu vârful în  $O$  (triunghiurile  $OAB$ ,  $OBC$  și  $OCA$ ).

Aceste trei triunghiuri au înălțimile duse din  $O$  egale cu raza cercului înscris. Notînd cu  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  ariile triunghiurilor  $ABC$ ,  $OAB$ ,  $OBC$  și  $OCA$  avem:

$$S = S_1 + S_2 + S_3, \quad S = \frac{1}{2} (AB \cdot r + BC \cdot r + AC \cdot r)$$

$$S = r \cdot \frac{AB + BC + AC}{2}; \text{ notînd perimetrul triunghiului cu}$$

$2p$  obținem  $S = rp$  de unde

$$r = \frac{S}{p}.$$

2) Prin fiecare vîrf al unui patrulater ducem o paralelă la diagonala patrulaterului care nu trece prin acest vîrf și se formează un nou patrulater. Să se găsească raportul dintre aria patrulaterului dat și aria patrulaterului obținut.

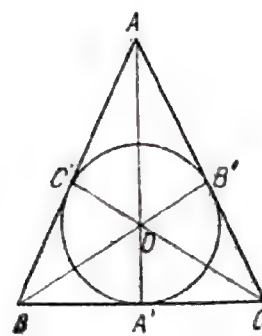


Fig. 171



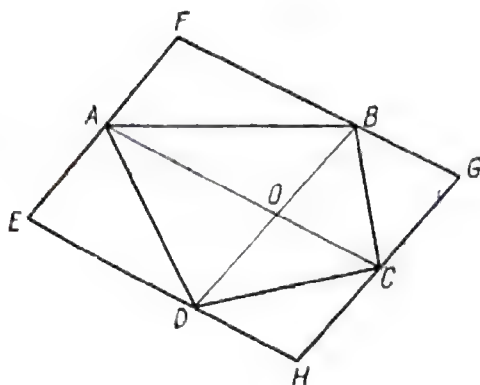


Fig. 172

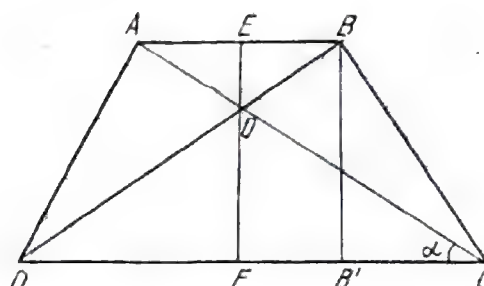


Fig. 173

Fie patrulaterul  $ABCD$ . Prin  $A$  și  $C$  ducem paralele la  $DB$ , prin  $B$  și  $D$  ducem paralele la  $AC$ ; se obține patrulaterul  $EFGH$  (fig. 172). Notăm cu  $O$  intersecția diagonalelor  $AC$  și  $DB$ . S-au format patru paralelograme:  $OAED$ ,  $OAFB$ ,  $OBGC$ ,  $OCHD$  care sînt împărțite fiecare în cîte două triunghiuri egale de diagonalele  $AD$ ,  $AB$ ,  $BC$ ,  $DC$ . Rezultă că

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} = \frac{1}{2}.$$

3) Într-un trapez isoscel diagonalele se intersectează în punctul  $O$ . Să se afle: a) distanțele de la  $O$  la baza mare și la baza mică, știind că aceste distanțe sînt proporționale cu numerele 17 și 7 și că  $\frac{2}{5}$  din distanța de bază mare întrece cu 4 cm 40% din distanța la baza mică.

b) Știind că baza mică este egală cu 14 cm și latura neparalelă cu 26 cm să se afle unghiul pe care-l face diagonala cu baza mare.

c) Să se arate că unghiul dintre diagonale are  $90^\circ$ .

d) Să se afle volumul piramidei care are baza, trapezul dat iar înălțimea de 40 cm. (Examen de admitere cl. a IX-a, sesiunea iunie 1968 București)

a) Fie trapezul isoscel  $ABCD$  cu  $b = AB$ ,  $B = CD$  și  $AD = BC$ . Ducem  $OE \perp AB$  și  $OF \perp CD$  (fig. 173). Notînd  $OE = x$  și  $OF = y$ , avem relațiile:

$$\frac{y}{17} = \frac{x}{7} \text{ și } \frac{2}{5} y - \frac{40}{100} x = 4. \text{ Formăm sistemul}$$

$$\begin{cases} y = \frac{17}{7} x \\ y - x = 10 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} y = \frac{17}{7} x \\ x \left( \frac{17}{7} - 1 \right) = 10. \end{cases}$$

$$x = 7; y = 17.$$

Distanțele la cele două baze sînt  $OE = 7$  cm și  $OF = 17$  cm.

b)  $AB = 14$  cm;  $AD = 26$  cm. Notăm cu  $\alpha$  unghiul  $ACD$  pe care-l încadrăm în triunghiul  $OFC$  în care  $OF = 17$  deci  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{17}{FC}$ ;  $FC = \frac{AB}{2} + B'C$  ( $B'$  proiecția

virfului  $B$  pe baza mare). În  $\triangle BB'C$  avem  $B'C^2 = 26^2 - 24^2 = 50 \cdot 2$ ,  $B'C = 10$  deci  $FC = 17$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{17}{1}, \alpha = 45^\circ.$$

c) Triunghiul  $DOC$  este isoscel  $\widehat{DOC} = \widehat{ACD}$  ( $\triangle ODF = \triangle OFC$  avînd catetele respectiv egale). Deci  $\widehat{DOC} = 180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$ .

$$d) V = \frac{S \cdot l}{3} \text{ unde } S \text{ este aria trapezului } \left( S = \frac{14 + 34}{2} \cdot 24 \right).$$

$$V = \frac{24^2 \cdot 40}{3} = 7680 \text{ cm}^3.$$

4) Baza unei prisme oblice este un triunghi  $ABC$  în care  $AB = AC = 3 \text{ cm}$  și  $BC = 2 \text{ cm}$ . Muchia laterală, egală cu  $4 \text{ cm}$ , formează cu planul bazei un unghi de  $45^\circ$ . Să se determine muchia cubului echivalent cu prisma.

Din  $C'$  ducem înălțimea  $C'C''$  perpendiculară pe planul bazei (fig. 174). În triunghiul  $CC'C''$  avem  $CC' = 4 \text{ cm}$  și  $\widehat{C'CC''} = 45^\circ$

$$2C'C''^2 = 16, C'C'' = 2\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Pentru a calcula aria bazei calculăm  $h_a$  (înălțimea  $AA''$ ).  $AA''^2 = 9 - 1$   $AA'' = \sqrt{8}$ ,  $AA'' = 2\sqrt{2}$ .

$$S_{ABC} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

$$V = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 8 \text{ cm}^3.$$

Volumul cubului cu muchia  $l$  este  $8 \text{ cm}^3$ .

$$l = \sqrt[3]{8}, l = 2 \text{ cm}.$$

5) Un paralelipiped drept are laturile  $CB = 8 \text{ cm}$  și  $BA = 15 \text{ cm}$ . Ele formează un unghi de  $60^\circ$ . Diagonala mică a paralelipipedului formează cu planul bazei un unghi de  $30^\circ$ . Să se calculeze aria laterală și volumul paralelipipedului.

Baza paralelipipedului este un paralelogram cu laturile  $AB$ ,  $BC$  și  $\widehat{ABC} = 60^\circ$  (fig. 175). În triunghiul  $ABC$ , ducem  $CE \perp AB$ , triunghiul  $CBE$  are  $BE = 4 \text{ cm}$  (cateta care se opune unui unghi de  $30^\circ$  este jumătate din ipotenuză).

$$CE^2 = 8^2 - 4^2 = 4 \cdot 12, CE = 4\sqrt{3}. \text{ În triunghiul } AEC$$

$$AC^2 = 48 + 121 = 169, AC = 13 \text{ cm}.$$

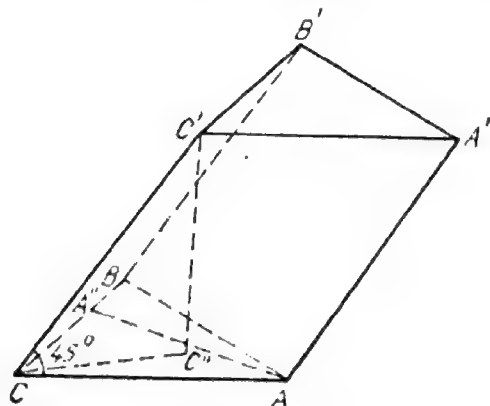


Fig. 174

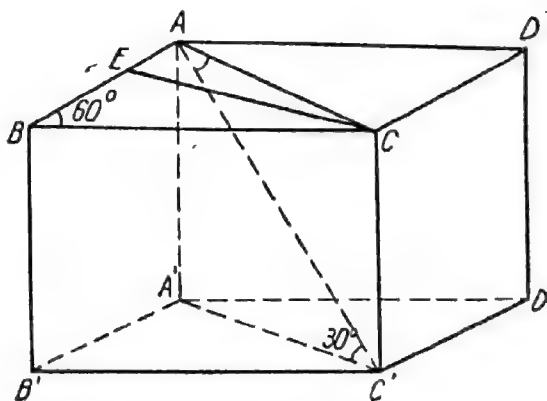


Fig. 175

În triunghiul dreptunghic  $C'CA$ ,  $AC = 13$ ,  $\widehat{CAC'} = 30^\circ$

$$CC' = 13 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 13 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm.}$$

Paralelipipedul fiind drept aria laterală este:

$$A_l = 2(8 + 15) \frac{13 \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{598 \sqrt{3}}{3} \approx 344,84 \text{ cm}^2;$$

$$V = 780 \text{ cm}^3.$$

6) Se dă un trapez dreptunghic ( $AB \parallel DC$ ) cu latura oblică  $BC = 25 \text{ cm}$ . Raportul dintre înălțimea trapezului și baza mică este  $3 : 5$  iar  $\frac{1}{2}$  din baza mică întrece cu  $12 \text{ cm}$

$\frac{1}{3}$  din înălțime. Să se calculeze:

- lungimea laturilor trapezului,
- volumul corpului obținut prin rotirea trapezului în jurul bazei mari,
- aria triunghiului  $MBC$  unde  $M$  este mijlocul înălțimii  $AD$ .

Fie trapezul  $ABCD$ . Notăm înălțimea  $AD$  cu  $i$  și bazele trapezului  $AB = b$ ,  $CD = B$  (fig. 176).

$$\text{Se dă: } BC = 25 \text{ cm, } \frac{i}{b} = \frac{3}{5}, \frac{1}{2} b - \frac{1}{3} i = 12.$$

$$\text{Rezolvăm sistemul } \begin{cases} \frac{i}{b} = \frac{3}{5} \\ \frac{b}{2} - \frac{i}{3} = 12 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} i = \frac{3}{5} b \\ \frac{b}{2} - \frac{b}{5} = 12. \end{cases} \quad b = 40, \quad i = 24.$$

Pentru a calcula  $B$  (baza mare) ducem  $BB' \perp DC$ , în  $ABCD$  avem:

$$B'C = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{49} = 7, \quad B = 40 + 7 = 47.$$

a) Laturile trapezului sînt:  $AB = 40$ ,  $CD = 47$ ,  $AD = 24$ ,  $BC = 25$ .

b) Prin rotire se obține un cilindru, cu generatoarea  $AB = 40$  și raza  $AD = 24$ , și un con cu aceeași bază, generatoarea  $BC = 25$  și înălțimea  $B'C = 7$ .

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2, \quad V = \pi R^2 \cdot DB' + \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot B'C = \\ &= \frac{\pi R^2}{3} (3DB' + B'C), \end{aligned}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 24^2}{3} (3 \cdot 40 + 7) = \pi 24 \cdot 8 \cdot 127 = 24\,384\pi \text{ (cm}^3\text{)},$$

$$V = 24\,384\pi \text{ cm}^3,$$

$$V \approx 76\,566 \text{ cm}^3.$$

c) Pe figura 177 observăm că  $A_{MBC} = A_{ABCD} - (A_{MAB} + A_{MDC})$

$$A_{MBC} = 12 \cdot 87 - 6 \cdot 87 = 6 \cdot 87 = 522 \text{ cm}^2.$$

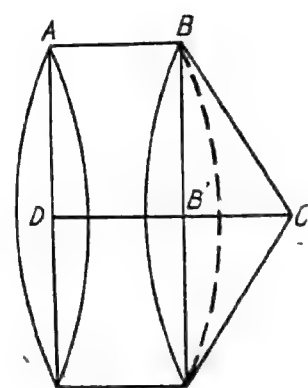


Fig. 176

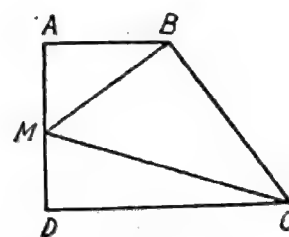


Fig. 177

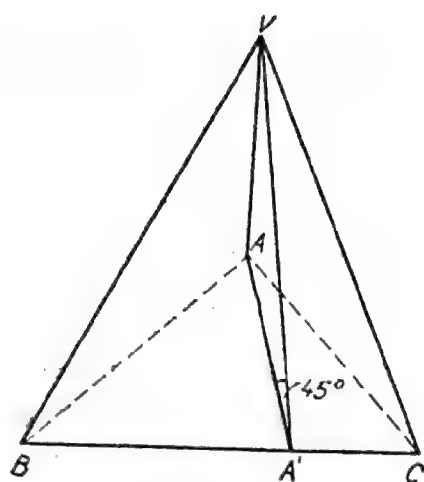


Fig. 178

7) Se dă piramida triunghiulară  $VABC$  cu baza  $ABC$  un triunghi dreptunghic cu catetele  $AB = 16$  cm,  $AC = 12$  cm. Știind că muchia laterală  $VA$  este perpendiculară pe planul bazei iar fața laterală  $VBC$  face cu planul bazei un unghi de  $45^\circ$  să se calculeze:

- volumul piramidei;
- suma muchiilor laterale ale piramidei;
- aria laterală a piramidei;
- volumul cilindrului circumscris piramidei  $VABC$ , baza cilindrului fiind cercul circumscris triunghiului  $ABC$ .

Concurs de matematică cl. a VIII-a, București 1968.

În piramida  $VABC$ ,  $VA \perp ABC$ . Unghiul diedru format de planele  $VCB$  și  $ABC$  are unghiul plan corespunzător diedrului unghiul format de  $AA'$ ,  $VA'$  (înălțimile triunghiurilor  $ABC$  și  $VCB$ ) (fig. 178). În adevăr, din:  $VA \perp ABC$  și  $AA' \perp CB$  deducem, pe baza teoremei celor trei perpendiculare că  $VA' \perp CB$ . Deci triunghiul  $VAA'$  este dreptunghic isoscel ( $\hat{A} = 1$  dr):  $VA = AA'$ .

$$AA' = \frac{AB \cdot AC}{BC}, \quad AB = 16 \text{ cm}, \quad AC = 12 \text{ cm}, \quad BC = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20 \text{ cm}.$$

$$AA' = AV = \frac{16 \cdot 12}{20} = \frac{48}{5} = 9,6 \text{ cm}.$$

$$a) \quad V = \frac{B \cdot I}{3}, \quad V = 307,200 \text{ cm}^3.$$

$$b) \quad VA = 9,6 \text{ cm}, \quad CV = \sqrt{9,6^2 + 12^2} \approx 15,36 \text{ cm}, \quad VB = \sqrt{9,6^2 + 16^2} \approx 18,66 \text{ cm}$$

$$VA + VB + CV = 9,6 + 15,36 + 18,66 = 43,62 \text{ cm}.$$

$$c) \quad A_l = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{VA \cdot AC}{2} + \frac{VA \cdot AB}{2} + \frac{CB \cdot VA'}{2}, \quad VA' = 9,6\sqrt{2}$$

$$A_l = \frac{9,6}{2} (16 + 12) + \frac{20 \cdot 9,6}{2} \sqrt{2} \approx 269,76 \text{ cm}^2.$$

$$d) \quad V = \pi R^2 I, \quad R = \frac{CB}{2} = 10, \quad I = AV = 9,6, \quad V = 960\pi.$$

$$V = 3014,400 \text{ cm}^3.$$

8) Într-un con, înălțimea este cu 2 cm mai mare decât raza, iar tangenta unghiului format de o generatoare cu înălțimea are valoarea  $\frac{3}{4}$ . Secționînd conul cu un plan paralel cu baza la o distanță de 3 cm față de vîrf, se obține un trunchi de con. Să se afle:

- volumul trunchiului de con;
- aria laterală a trunchiului de con.



În conul dat notăm cu  $I$  și  $R$  respectiv înălțimea și raza conului, cu  $\alpha$  unghiul format de generatoare cu înălțimea. Avem date relațiile:

$$I - R = 2, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \quad \text{deci} \quad \frac{3}{4} = \frac{R}{I}.$$

Formăm sistemul 
$$\begin{cases} I - R = 2 \\ R = \frac{3}{4} I \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} R = \frac{3}{4} I \\ I - \frac{3}{4} I = 2 \end{cases}$$

$$I = 8, \quad R = 6.$$

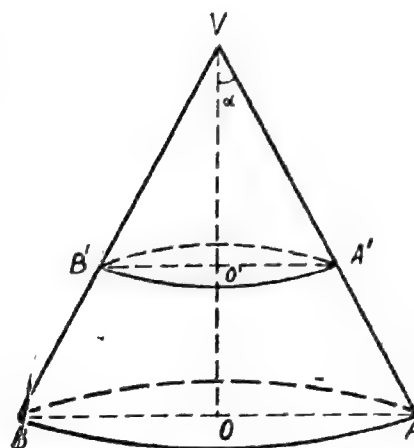


Fig. 179

a) Secționînd conul cu un plan paralel cu baza la 3 cm de vîrf (fig. 179) avem un trunchi de con în care  $R = 6$  cm. Din triunghiul  $VAB$  ( $A'B' \parallel AB$ ) obținem:

$$\frac{VO}{VO'} = \frac{R}{r}, \quad \frac{8}{3} = \frac{6}{r}, \quad r = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ cm}, \quad I = 8 - 3 = 5 \text{ cm}.$$

$$V = \frac{\pi I}{3} (R^2 + r^2 + Rr), \quad V = \frac{5\pi}{3} (5,0625 + 36 + 13,50) = 90,94 \pi \text{ cm}^3.$$

b) Notînd cu  $G_1$  generatoarea trunchiului, din trapezul dreptunghic  $OA'A'O$  în care  $O'A' = \frac{9}{4}$ ,  $OA = 6$ ,  $OO' = 5$  obținem

$$G_1^2 = 25 + \left(\frac{15}{4}\right)^2 = \frac{625}{16}, \quad G_1 = 6,25 \text{ cm}.$$

$$A_1 = \pi \cdot \frac{25}{4} \cdot 8,25 \approx 161,90 \text{ cm}^2.$$

## IX

### Secțiuni plane

Pentru rezolvarea celor mai multe probleme din geometria în spațiu, căutăm să stabilim cea mai convenabilă secțiune cu un plan astfel încât să reducem problema dată la o problemă de geometrie plană.

De exemplu, pentru a găsi relațiile între elementele unei piramide, con, trunchi de con, trunchi de piramidă, ducem un plan de secțiune (planul determinat de înălțime și muchie, sau de înălțime și apotemă ș.a.m.d.).

#### Exemple

1) Să se calculeze aria sferei circumscrise unei piramide triunghiulare regulate cu fețele triunghiuri echilaterale (tetraedrul regulat) cu latura  $a$ .

Fie tetraedrul  $VABC$  (fig. 180). Notăm cu  $R$  raza sferei circumscrise tetraedrului regulat cu latura  $a$ . Considerăm planul determinat de înălțimea  $VO$  a tetraedrului și muchia  $VA$ . Acest plan taie sfera după un cerc mare cu diametrul  $VV'$ . În acest plan triunghiul  $VV'A$  este dreptunghic în  $A$  (înscris într-un semicerc) deci:  $VA^2 = VV' \cdot VO$  ( $VV'$  este diametrul sferei iar  $VO$  este înălțimea tetraedrului). Dar  $OA = r$  (raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$ ) deci  $OA = \frac{a}{\sqrt{3}}$  și

$$VO^2 = a^2 - \frac{a^2}{3}, \quad VO = \sqrt{\frac{2a^2}{3}}, \quad VO = \sqrt{\frac{2}{3}} a.$$

$$a^2 = 2R \sqrt{\frac{2}{3}} a, \quad R = \frac{a}{2 \sqrt{\frac{2}{3}}}, \quad R = \frac{\sqrt{6}a}{4}.$$

2) Să se calculeze latura unui cub înscris într-o sferă de rază  $R$ .

Cubul are bazele paralele și egale, planele lor sînt simetrice față de centrul sferei. Ele taie sfera după două cercuri egale circumscrise pătratelor de bază (fig. 181).

Ducînd planul secțiunii diagonale în cub, acesta taie cele două plane paralele ale bazelor după două drepte paralele  $AC$  și  $A'C'$ ;  $AC'$  este diametrul sferei iar  $AC = a\sqrt{2}$ .

$$4R^2 = a^2 + 2a^2, \quad 4R^2 = 3a^2, \quad a = \frac{2\sqrt{3}}{3} R.$$

3) Baza unei prisme drepte  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  este un trapez isoscel  $ABCD$  cu laturile  $AB = CD = 13$  cm;  $BC = 11$  cm și  $AD = 21$  cm. Aria secțiunii diagonale este egală cu  $180$  cm<sup>2</sup>. Să se calculeze a) aria totală; b) volumul; c) aria secțiunii  $A, B_1, C_1, D$ .





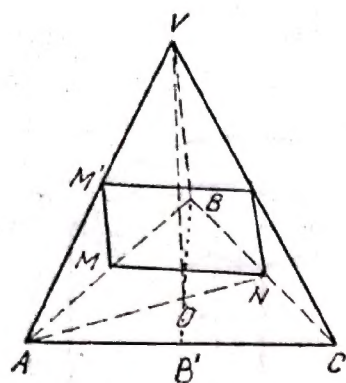


Fig. 183

4) În piramida triunghiulară regulată  $VABC$  cu latura bazei  $a$  și muchia laterală  $b$  se duce prin mijloacele laturilor  $AB$  și  $BC$  ale bazei un plan paralel cu muchia  $VB$ . Să se determine forma și aria secțiunii obținute.

Notăm cu  $M$  și  $N$  mijloacele laturilor  $AB$  și  $BC$  (fig. 183)  $MN \parallel AC$  (linie mijlocie în  $\triangle ABC$ ) deci  $MN \parallel VAC$ . Planul de secțiune intersectează fața  $VAC$  după o dreaptă  $M'N' \parallel AC$  deci  $M'N' \parallel MN$ .

Planul de secțiune fiind paralel cu  $VB$  înseamnă că el va intersecta planele  $VBC$  și  $VBA$  după două drepte paralele cu  $BV$ .  $NN' \parallel BV$  și  $MM' \parallel BV$  deci  $MM' \parallel NN'$ .

Patrulaterul  $MM'NN'$  este paralelogram cu laturile

$$MM' = NN' = \frac{b}{2}, \quad MN = M'N' = \frac{a}{2}.$$

Dar  $AC \perp BV$  pentru că  $AC$  este perpendiculară pe planul determinat de  $VB$  și înălțimea  $BB'$  a triunghiului echilateral  $ABC$ . În adevăr, dacă ducem  $VO$  înălțimea piramidei, ea se găsește în planul  $VBB'$ . Avem:  $AC \perp BB'$  și  $AC \perp VO$ . Rezultă

$$AC \perp VBB' \quad \text{deci} \quad AC \perp BV.$$

Paralelele la  $AC$  și  $BV$  respectiv  $MN$  și  $M'N'$  sînt și ele perpendiculare. Paralelogramul  $MM'N'N$  avînd un unghi drept este dreptunghi.

$$S_{MM'N'N} = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{4}.$$

5) Un paralelipiped drept  $ABCD A'B'C'D'$  are baza un pătrat cu latura  $AB = a$  și înălțimea  $AA' = 2a$ . În planul  $BCC'B'$  se duce o semidreaptă  $BE$  care face cu  $BC$  un unghi de  $45^\circ$  ( $E \in CC'$ ) iar în planul  $ABB'A'$  o semidreaptă  $BF$  care face cu  $AB$  un unghi de  $45^\circ$  ( $F \in AA'$ ).

a) Să se demonstreze că planul determinat de dreptele  $BE$  și  $BF$  taie paralelipipedul după un romb.

b) Să se afle aria rombului.

c) Să se calculeze unghiurile rombului.

a) Planul determinat de punctele  $BEF$  taie (fig. 184) planele  $D'C'CD$  și  $ABA'B'$  după drepte paralele. Paralela din  $E$  la  $FB$  trece prin  $D'$  simetricul lui  $B$  față de mijlocul lui  $EF$  ( $BF \parallel ED'$ ) analog:  $D'F \parallel BE$  deci secțiunea este un paralelogram,  $EB = FB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$  deci secțiunea este un romb.

b)  $A = \frac{EF \cdot BD'}{2}$  dar  $EF = AC = a\sqrt{2}$  și  $BD'$  diagonală paralelipipedului este  $BD' = a\sqrt{6}$  ( $BD'^2 = BD^2 + DD'^2$ ) deci

$$A = \frac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{6}}{2} = a^2\sqrt{3}.$$

c) Rombul este format din triunghiurile echilaterale  $FEB$  și  $FD'E$  deci  $\hat{B} = \hat{D}' = 60^\circ$ ,  $\hat{E} = \hat{F} = 120^\circ$ .

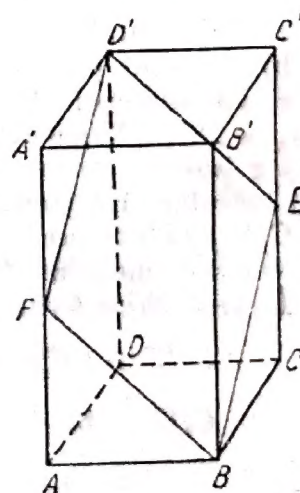


Fig. 184



**Observare.** Dacă  $AA' = a$ , atunci planul de secțiune este determinat de dreptele  $BC'$ ,  $BA'$  deci secțiunea în acest caz este un triunghi echilateral (paralelipipedul este un cub). Dacă  $AA' < a$  dreptele  $BE$  și  $BF$  intersectează muchiile  $CC'$  și  $AA'$  în afara paralelipipedului. În acest caz planul de secțiune este un triunghi isoscel  $BE'F'$  unde  $E'$  și  $F'$  sînt punctele în care  $BE$  și  $BF$  intersectează muchiile  $A'B'$  și  $B'C'$ . Dacă  $AA' > 2a$  planul taie muchia  $DD'$  într-un punct  $G$  situat între  $D$  și  $D'$  ( $G$  este simetricul lui  $B$  față de mijlocul segmentului  $EF$ ); secțiunea este un romb.

6) O piesă este formată dintr-un cub  $ABCD A'B'C'D'$  cu latura  $2a$  terminat cu o piramidă regulată  $VA'B'C'D'$  a cărei apotemă este egală cu latura cubului ( $V$ , vârful piramidei).

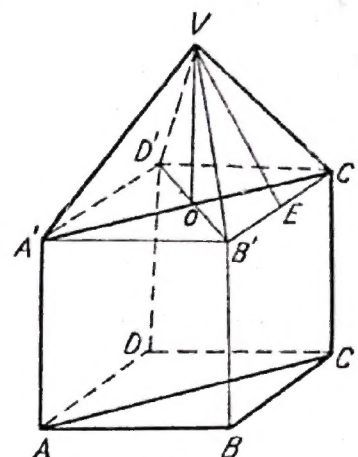


Fig. 185

Să se calculeze:

- 1) aria laterală și totală a piesei; 2) volumul piesei;
- 3) aria secțiunii făcute în piesă de un plan ce trece prin punctele  $V$ ,  $A$  și  $C$ ; 4) înălțimea unei prisme care are același volum cu piramida  $VA'B'C'D'$  și a cărei bază este egală cu pătratul obținut prin unirea mijloacelor laturilor pătratului  $ABCD$ .

(Concursul de matematică, cl. a VIII-a, etapa locală, București, 1969).

- 1) Notînd cu  $E$  mijlocul laturii  $B'C'$  (fig. 185); apotema piramidei  $VE = 2a$ ;  $A_l = 16a^2 + 8a^2 = 24a^2$ ,  $A_t = 24a^2 + 4a^2 = 28a^2$ .

- 2) Pentru a calcula volumul calculăm înălțimea  $VO$  a piramidei;  
 $VO = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$ ,

$$V = 8a^3 + \frac{4\sqrt{3}}{3}a^3 = \frac{4a^3}{3}(6 + \sqrt{3}).$$

- 3) Planul de secțiune determinat de punctele  $V$ ,  $A$  și  $C$  taie cubul după dreptunghiul  $ACC'A'$  (planele paralele  $ABCD$  și  $A'B'C'D'$  sînt intersectate de planul  $VAC$  după segmentele paralele și egale:  $AC \parallel A'C'$ ,  $AA' \perp AC$ ) și piramida după triunghiul  $VA'C'$ . Secțiunea este formată de un dreptunghi și un triunghi construit pe o latură a dreptunghiului:  $A'C' = 2\sqrt{2}a$  ( $A'C'^2 = 4a^2 + 4a^2 = 8a^2$ ), înălțimea dreptunghiului  $AA' = 2a$ , înălțimea triunghiului,  $VO = a\sqrt{3}$ .

$$A_{\text{secțiunii}} = 4\sqrt{2}a^2 + \frac{2\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot a}{2} = \sqrt{2}a^2(4 + \sqrt{3}).$$

- 4) Fie  $FGHI$  pătratul obținut prin unirea mijloacelor laturilor pătratului  $ABCD$ . Pătratul  $FGHI$  este pătrat avînd toate laturile egale ( $FG = GH = HI = IF = a\sqrt{2}$ ) și unghiurile drepte (fig. 186).

$$V = (a\sqrt{2})^2 \cdot I.$$

$$\frac{4\sqrt{3}a^3}{3} = 2a^2 I; \quad I = \frac{2\sqrt{3}a}{3}.$$

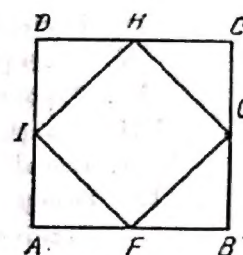


Fig. 186

## CUPRINS

### ARITMETICĂ ȘI ALGEBRĂ

I. Numere raționale .....	3
II. Numeratia .....	34
III. Expresii algebrice.....	41
IV. Divizibilitatea numerelor și polinoamelor.....	50
V. Operații cu numere și cu polinoame.....	65
VI. Rapoarte și proporții .....	105
VII. Ecuații și sisteme de ecuații.....	113
VIII. Inegalități .....	140
IX. Funcții .....	148
X. Rezolvarea problemelor de aritmetică.....	162
XI. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor.....	183

### GEOMETRIE

I. Noțiuni introductive.....	195
II. Unghiuri .....	202
III. Demonstrarea teoremelor .....	213
IV. Paralelismul dreptelor și planelor .....	223
V. Triunghiul .....	237
VI. Cercul. Poligoane regulate .....	251
VII. Construcții grafice.....	266
VIII. Aree și volume.....	277
IX. Secțiuni plane .....	292

Nr. Colilor de tipar : 18,50



Combinatul Poligrafic  
„CASA SCINTEII“  
București — R.S.R.  
com. 411/1373